

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À

L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN PHYSIQUE

PAR
JONATHAN BOUCHARD

**ÉTUDE NUMÉRIQUE DE L'INFLUENCE DE LA DÉMAGNÉTISATION SUR
L'EFFET MAGNÉTOCALORIQUE DU GADOLINIUM PUR**

AVRIL 2005

Université du Québec à Trois-Rivières

Service de la bibliothèque

Avertissement

L'auteur de ce mémoire ou de cette thèse a autorisé l'Université du Québec à Trois-Rivières à diffuser, à des fins non lucratives, une copie de son mémoire ou de sa thèse.

Cette diffusion n'entraîne pas une renonciation de la part de l'auteur à ses droits de propriété intellectuelle, incluant le droit d'auteur, sur ce mémoire ou cette thèse. Notamment, la reproduction ou la publication de la totalité ou d'une partie importante de ce mémoire ou de cette thèse requiert son autorisation.

Résumé

Les calculs thermodynamiques des cycles de réfrigération magnétique requièrent la détermination de l'effet magnétocalorique. Cette propriété qu'exhibe tout matériau ferromagnétique est évaluée en considérant que le champ magnétique externe appliqué au matériau ne subit aucune altération ni atténuation. Ainsi, la distribution spatiale du champ magnétique au sein du matériau demeure uniforme. En réalité, la distribution du champ magnétique dans un matériau magnétique soumis à un champ externe dépend de sa forme et de sa magnétisation. Puisque l'effet magnétocalorique dépend aussi de la température, certains phénomènes transitoires d'échange de chaleur par conduction peuvent entraîner une modification de ce dernier. L'objectif de cette étude est de quantifier l'impact de ces deux phénomènes sur l'effet magnétocalorique d'une plaque mince de gadolinium pur.

Pour ce faire, la résolution simultanée des équations d'énergie et du potentiel magnétique scalaire a été effectuée en régime transitoire. La commutation du champ magnétique est simulée en imposant des conditions aux limites transitoires sur le champ appliqué. La fréquence de commutation a été fixée à 0.1 Hz. Les températures initiales ont été fixées à des valeurs près du point de Curie et les champs magnétiques appliqués varient entre 1 et 2 teslas. Les résultats obtenus permettent de conclure que le champ magnétique subit une réduction relative allant jusqu'à 9.3 %. Cette diminution est concentrée aux voisinages des frontières de la plaque. Il en résulte que l'énergie magnétique fournie à la plaque est réduite de 3 % en moyenne. Conséquemment, les impacts sur l'effet magnétocalorique peuvent être négligés. De plus, les échanges de chaleur par conduction entre le volume magnétisé et le volume non magnétisé de la plaque n'affectent pas de façon importante l'effet magnétocalorique.

Étudiant

Directeur de recherche

Codirecteur de recherche

Table des matières

Résumé.....	ii
Liste des figures	v
Liste des tableaux.....	viii
Liste des symboles	ix
Introduction.....	1
1. Contexte.....	1
2. Réfrigération magnétique.....	2
3. La problématique du calcul de l'efficacité.....	5
4. Définition du projet.....	8
Chapitre 1: Effet magnétocalorique.....	10
1.1. Magnétisation et domaines magnétiques	10
1.2. Transition de phase magnétique	13
1.3. Modèle statistique.....	14
1.3.1. Entropie et température.....	14
1.3.2. Capacité calorifique	21
Chapitre 2: Modèle	23
2.1. Géométrie et maillage.....	23
2.2. Équation magnétostatique.....	24
2.2.1. Potentiel magnétique scalaire	24
2.2.2. Clarification de la démagnétisation	27
2.3. Équation thermique.....	28
2.3.1. Équation d'énergie	28
2.3.2. Terme de source	28
2.4. Couplage des équations magnétostatique et thermique	29
2.4.1. Méthodologie de résolution	29
2.4.2. Conditions aux limites et conditions initiales	30
2.5. Propriétés physiques du gadolinium	35

2.5.1. Perméabilité magnétique.....	35
2.5.2. Capacité calorifique	38
2.6. Validation du modèle.....	41
2.6.1. Validation magnétostatique	41
2.6.2. Validation thermique	45
2.6.3. Indépendance de la solution sur le maillage	46
2.7. Considérations numériques.....	48
2.7.1. Traitement de l'interface magnétique	48
2.7.2. Solution du potentiel magnétique scalaire	50
2.7.3. Évaluation de la fonction de Brillouin	51
2.7.4. Approximations de l'équation de magnétisation	53
2.7.5. Évaluation de l'entropie du réseau.....	54
2.7.6. Évaluation du terme de source thermique.....	55
Chapitre 3: Résultats	57
3.1. Paramètres d'analyses.....	57
3.2. Réduction de l'intensité magnétique	59
3.2.1. Effet de bord	59
3.2.2. Effet transitoire	62
3.3. Impacts sur l'effet magnétocalorique	63
3.3.1. Effets transitoire à l'interface magnétique.....	63
3.3.1.1.Densité d'énergie à l'interface	65
3.3.1.2.Énergie à l'interface magnétique	69
3.3.2. Effets sur la température finale	72
Conclusion	75
Appendice A	78
Liste des références	85

Liste des figures

Figure 1.1 : Cycle de réfrigération magnétique versus cycle de réfrigération par compression de gaz	4
Figure 1.2 : Configurations réciproque et circulaire.....	5
Figure 1.3 : Perturbation du champ magnétique et réduction dans le matériau magnétique	6
Figure 1.4 : Configuration étudiée par Dai [11]	7
Figure 1.5 : Échange de chaleur 'Q' à la zone de chevauchement	8
Figure 1.6 : Définition de la magnétisation	10
Figure 1.7 : Domaines magnétiques [8].....	11
Figure 1.8 : Réorganisation des domaines magnétiques sous un champ externe [23].....	11
Figure 1.9 : État quantique d'un atome en relation avec l'EMC	12
Figure 1.10 : Transition de phase magnétique de second ordre pour le gadolinium	14
Figure 1.11 : Distribution de Fermi pour les électrons à température fixe	20
Figure 1.12 : Capacité calorifique du gadolinium; calculée avec 1.31 versus mesurée ...	22
Figure 2.1 : Section transversale d'un aimant permanent construit selon le principe de Halbach	23
Figure 2.2 : Plaque mince modélisée	24
Figure 2.3 : Solution magnétostatique	25
Figure 2.4 : Courbe d'hystérésis	27
Figure 2.5 : ΔT_{ad} du gadolinium en fonction de la température pour une variation de champ de ± 2 teslas	29
Figure 2.6 : Organigramme de solution pour chaque nœud de calcul et chaque incrément de temps	30
Figure 2.7 : Conditions aux limites en potentiel magnétique scalaire	31
Figure 2.8 : Déplacement des conditions aux limites	33
Figure 2.9 : Plan de symétrie	34
Figure 2.10 : Magnétisation en fonction du champ appliqué pour un échantillon sphérique de gadolinium	36
Figure 2.11 : Données de perméabilité magnétique relative pour le gadolinium	37

Figure 2.12 : Calcul numérique de la perméabilité à l'aide des données mesurées.....	38
Figure 2.13 : Régressions pour les mesures de capacité calorifique à champ nul du gadolinium	39
Figure 2.14 : Capacité calorifique du gadolinium pour un champ de 2 teslas; comparaison des mesures avec le modèle de calcul.....	41
Figure 2.15 : Problème magnétique de validation	42
Figure 2.16 : Validation de la solution numérique du potentiel magnétique; distribution selon y	44
Figure 2.17 : Validation de la solution numérique du potentiel magnétique; distribution selon x	44
Figure 2.18 : Validation de la solution numérique du potentiel magnétique; distribution selon z	45
Figure 2.19 : Validation du terme de source; distribution de la température selon x après la simulation d'un cycle complet.....	46
Figure 2.20 : Intensité magnétique selon Oy pour 3 maillages.....	47
Figure 2.21 : Discontinuité de l'intensité magnétique causée par l'interface magnétique	48
Figure 2.22 : Domaine et plaque modélisé par Flux3d.....	49
Figure 2.23 : Décroissance à une interface magnétique tel que solutionnée par Flux3d..	50
Figure 2.24: Nombre d'itérations nécessaires à la convergence de la solution magnétique	51
Figure 2.25 : Fonction de Brillouin et sa dérivée pour le gadolinium	52
Figure 2.26 : Validation de l'approximation polynomiale de l'intégrale de réseau	55
Figure 3.1 : Illustration du mouvement de la plaque lors de la magnétisation	58
Figure 3.2 : Distribution de l'Intensité magnétique pour le cas 2.....	60
Figure 3.3 : Distribution de la perméabilité magnétique relative pour le cas 2	60
Figure 3.4 : Réduction de l'intensité magnétique à l'interface magnétique; cas 2 à $t=2.4$ s	63
Figure 3.5 : Distribution selon x de l'EMC pour le cas 2 à $t=2.4$ s.....	64
Figure 3.6 : Température à l'interface pour le cas 2 à $t=2.4$ s	65
Figure 3.7 : Variation de l'intensité magnétique pour le cas 2 entre 2.2 et 2.4 s.....	65

Figure 3.8 : Différences de densités d'énergie normalisée 3.3 en fonction du temps pour une température initiale de 271 K; cas 7, 8 et 9.....	67
Figure 3.9 : Différences de densités d'énergie normalisée 3.3 en fonction du temps pour une température initiale de 281 K; cas 1, 2 et 3.....	68
Figure 3.10 : Différences de densités d'énergie normalisée 3.3 en fonction du temps pour une température initiale de 291 K; cas 4, 5 et 6.....	68
Figure 3.11 : Énergies \bar{E}_i pour le cas 7 en fonction du temps	71
Figure A.1 : Géométrie et conditions aux limites	79

Liste des tableaux

Tableau 2.1: Propriétés physiques du gadolinium	35
Tableau 2.2: Coefficients polynomiaux 1; $T < T_c$	40
Tableau 2.3: Coefficients polynomiaux 2; $T > T_c$	40
Tableau 2.4: Coefficients pour l'approximation polynomiale.....	54
Tableau 3.1: Définition des paramètres de simulation.....	57
Tableau 3.3: Variables qui servent à l'analyse des résultats.....	59
Tableau 3.4: Taux maximaux de la réduction de l'intensité magnétique et intensités magnétiques moyennes dans toute la plaque à $t=5$ s	61
Tableau 3.5: Différences de températures moyennes $\Delta\bar{T}$ et d'énergies moyennes $\Delta\bar{E}$.	71
Tableau 3.6: EMC moyen et différences d'énergies moyennes à $t=5$ secondes	73
Tableau 3.7: Écart maximum de température $\Delta T_{\text{gradients}}$	73
Tableau A.1: Familles de solutions pour l'équation caractéristique A.11	80
Tableau A.2: Familles de solutions pour l'équation caractéristique A.13	81

Liste des symboles

$\mathbf{a}_{x,y,z}$	Vecteur unitaire de direction
\mathbf{B}	Induction magnétique (T)
B_U	Fonction de Brillouin
C_p	Capacité calorifique (J/kg-K)
c_s	Vitesse de propagation des ondes vibrationnelles (m/s)
E	Énergie (J)
\bar{E}_t	Énergie normalisée
f	fréquence (Hz)
F	Fonction de Heaviside
$F(\epsilon)$	Distribution de Fermi
g	Facteur de Lande
h	Hauteur de la plaque (mm)
H	¹ Intensité magnétique (A/m), (T)
H_0	Intensité magnétique d'un champ externe appliqué (A/m), (T)
H_m	Intensité magnétique du champ moléculaire (A/m), (T)
\hbar	Constante de Planck (J-s)
J	Intégrale d'échange (J)
k	Constante de Boltzmann (J/K), Conductivité thermique (W/m-K)
l	Épaisseur de la plaque (mm)
L	Longueur de la plaque (mm)
M	Magnétisation (J/T-mol), (J/T-kg), (A/m), (T)
m_m	Masse molaire (kg/mol)
m_k	Moment atomique (A-m ²)
m	Indice quantique de spin atomique
N	Nombre de particules
N_d	Facteur de démagnétisation
n	Nombre de plus proche voisins
n_r	Indice quantique d'énergie
S	Entropie (J/kg-K)
S_M	Entropie magnétique (J/kg-K)
S_R	Entropie de réseau (J/kg-K)
S_E	Entropie électronique (J/kg-K)
S_T	Terme source de l'équation d'énergie (W/m ³)
t	Temps (s)
T	Température (K)
T_c	Température de Curie (K)
T_D	Température de Debye (K)
u	Vitesse (m/s)
U_n	Composante du spin atomique net dans la direction du champ externe
V	Volume (m ³)
V_0	Énergie potentielle à l'équilibre (J)

¹ Lorsque plus d'une unité s'applique à un symbole, celle-ci est précisée de façon explicite en regard du contexte.

x	Coordonnée cartésienne
y	Coordonnée cartésienne
z	Coordonnée cartésienne
Z	Fonction de partition statistique
β	$1/kT$ (1/J)
ΔT_{ad}	Variation de température adiabatique (K)
ΔS_M	Variation d'entropie magnétique (J/kg-K)
ε	Énergie (J)
$\bar{\varepsilon}_v$	Densité volumique d'énergie normalisée
η	Rapport de l'énergie magnétique avec l'énergie thermique
γ	Coefficient de capacité calorifique électronique (J/k-mol)
λ	Constante de champ moléculaire (T^2/J)
μ	Perméabilité magnétique (H/m), énergie de Fermi (J)
μ_r	Perméabilité magnétique relative
μ_0	Perméabilité magnétique du vide (H/m)
μ_B	Magnéton de Bohr (J/T)
Ω	Nombre d'état d'énergie par tranche d'énergie
ω	Fréquence des modes de vibration (Hz)
ω_D	Fréquence de coupure de Debye (Hz)
φ	Potentiel magnétique scalaire (A)
Ψ	Hamiltonien (J)
ρ	Densité (kg/m^3)
$\sigma(\omega)$	Distribution en fréquence des modes de vibration
χ	Énergie de liaison par atome au zéro absolu (J)

Introduction

1. Contexte

Récemment, les instances gouvernementales ont porté un intérêt particulier sur l'efficacité énergétique. Ceci a pour effet de favoriser la recherche et développement dans les secteurs les plus énergivores en mettant l'accent sur des solutions innovatrices et écologiques pour substituer les technologies conventionnelles. L'industrie de la production de froid fait partie des secteurs concernés. À ce titre, la réfrigération magnétique (RM) figure parmi les technologies prometteuses à fort potentiel en efficacité énergétique. Cette technologie est basée sur l'effet magnétocalorique (EMC) qui consiste en l'échauffement d'un matériau magnétique dès qu'il est soumis à un champ magnétique. Le matériau magnétique s'échauffe lors de la magnétisation et se refroidit lors de la démagnétisation. Entre les deux processus, des échanges de chaleur ont lieu entre le matériau et les sources chaude et froide par l'intermédiaire de fluides caloporteurs.

La réfrigération magnétique est traditionnellement connue pour la production de température cryogéniques allant jusqu'à 20 K servant à la liquéfaction de l'hydrogène. Ce procédé est traditionnellement réalisé par des technologies qui font appel à la compression et l'expansion des gaz qui ont une efficacité maximum de 35% du cycle idéal de Carnot. Ainsi, le coût de liquéfaction de l'hydrogène représente environ la moitié de son coût de production [1]. La substitution des technologies traditionnelles de liquéfaction de l'hydrogène par une méthode plus efficace comme la RM permettrait d'améliorer la viabilité de l'utilisation de l'hydrogène en guise de carburant. C'est d'ailleurs cette application qui sert le plus souvent de promotion pour la RM à basse température. La RM présente aussi un potentiel aux températures ambiantes dans les secteurs commercial, institutionnel et industriel pour des applications telles que les systèmes de climatisation de grande puissance, certains procédés chimiques et la récupération de chaleur.

Il est entrevu que le rendement associé à la RM serait approximativement 20% plus élevé que pour les systèmes de réfrigération à compression les plus performants. De plus, l'état solide du réfrigérant permet d'éviter l'émission de gaz nocifs pour la couche d'ozone tels que les CFC et HCFC. Un système de RM peut être compact en raison de la haute densité d'énergie que présente le réfrigérant. L'absence de compresseur fait de la RM une technologie relativement silencieuse.

2. Réfrigération magnétique

L'effet magnétocalorique fût découvert par Warburg sur le fer [42]. Cet effet a été mis à profit par Debye et Giaque qui ont posé les bases du cycle de réfrigération magnétique; une magnétisation isotherme suivi d'une démagnétisation adiabatique permettant l'atteinte d'une température de moins de 1 K [13]-[14]. Avant les années 1970, la RM était exclusivement utilisée pour l'atteinte de basses températures à l'aide de sels paramagnétiques. Aux basses températures, l'excitation électronique est minimum et l'énergie reliée au réseau est grandement réduite. L'énergie magnétique injectée au matériau paramagnétique par un aimant est donc suffisante pour induire une variation de température notable. La première preuve de concept de réfrigération magnétique à température ambiante fût réalisée par Brown au milieu des années 1970. S'inspirant du cycle avec régénération que Geuns a développé pour atteindre des températures entre 4 et 15 K à l'aide d'un matériau paramagnétique [40], Brown réussit à générer un différentiel de température de 47°C entre la source chaude et la source froide par l'utilisation d'un réfrigérant ferromagnétique. Son prototype consistait en un fluide régénérateur composé majoritairement d'eau contenu dans un cylindre en mouvement sur l'axe de plaques minces de gadolinium et situé dans le pôle d'un électroaimant [4].

Suite à cette percée de Brown, plusieurs prototypes de démonstration de RM opérant dans différentes plages de températures ont été présentés. Entre autres, au milieu des années 1990, Astronautics Corporation of America tente d'atteindre la température nécessaire à la liquéfaction de l'hydrogène. La température minimale atteinte est de 34 K, soit 14 K au dessus de la température visée [41]. Au cours des dernières années, c'est la température

ambiante qui est la plage d'opération de prédilection pour les prototypes de RM. En 1998, Ames Laboratory, en collaboration avec Astronautics Corporation of America, présente les résultats associés à un réfrigérateur magnétique qui délivre une puissance de réfrigération de 200 watts générant un différentiel de température de 7 K [43]. Le gadolinium, utilisé en guise de réfrigérant, est soumis à un champ magnétique de 1.5 teslas produit par un aimant permanent. Dans un effort subséquent, le même groupe de recherche produit un prototype d'environ 50 watts avec un différentiel de température de 10 K [16]. L'équipe japonaise de Chubu Electric Power s'inspire fortement des travaux réalisés et produit deux prototypes équivalents; le premier utilise un champ de 4 teslas pour générer un différentiel de température de 23 K [20] et le second utilise un champ moyen de 0.7 teslas et met à profit un alliage de gadolinium et de dysprosium en guise de réfrigérant [21].

L'emphase mise sur la conception de prototypes met en évidence le manque de compréhension des phénomènes physiques complexes qui surviennent lors d'un cycle de RM et suggère un besoin important de modélisation dans le but d'expliquer les données expérimentales recueillies. C'est principalement pour combler cette lacune que l'équipe du Laboratoire d'Électrotechnique de Grenoble a produit un prototype instrumenté simple et versatile suivant une configuration réciproque [9]. Ce dernier permettra d'optimiser le fonctionnement d'un RM en plus de confronter certains modèles théoriques aux résultats expérimentaux recueillis. Dans ce même souci, un volet de recherche axé sur la compréhension et la modélisation des phénomènes liés à l'effet magnétocalorique des matériaux magnétique s'est développé au cours des dernières années. Entre autres, les travaux de Tishin sur la classification, la quantification et l'explication des effets magnétocaloriques des matériaux magnétiques tels que les lanthanides, les métaux de transition, les terres rares et leurs composés [12], [37], [38], [39]. Lors de cette vague, les composés dont le point de Curie peut-être ajusté ont été découverts. En modifiant uniquement le rapport des quantités de silicium et de germanium, le composé $Gd_5(Si_xGe_{1-x})_4$ présente un point de Curie ajustable entre 20 et 305 K en plus de posséder un EMC qualifié de géant [15], [16], [17], [29]. Il en est de même pour le composé $MnFeP_{1-x}As_x$ dont le ratio de phosphore et d'arsenic permet d'ajuster le point de Curie entre 168 et 332

K [36]. Ces matériaux sont donc entrevus pour remplacer le gadolinium qui est le seul réfrigérant utilisé jusqu'à présent dans les prototypes de RM.

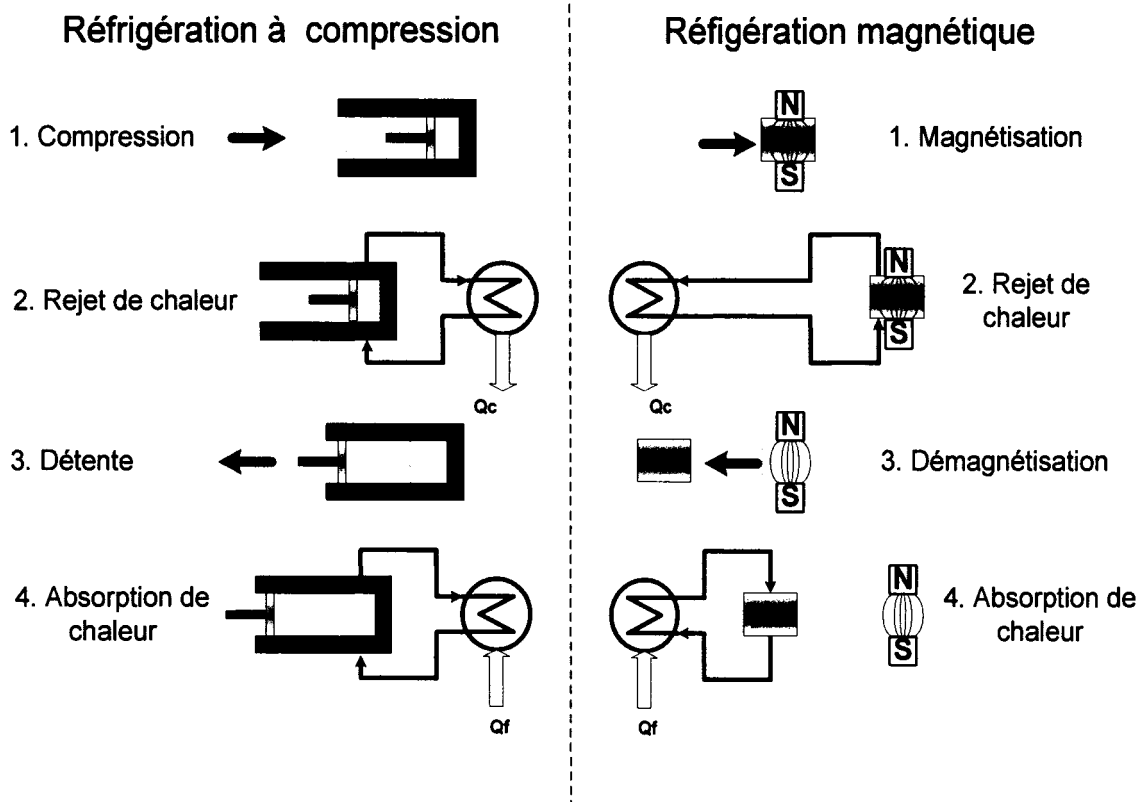


Figure 1.1 : Cycle de réfrigération magnétique versus cycle de réfrigération par compression de gaz

Le cycle de base de réfrigération magnétique peut être expliqué par analogie avec le cycle de réfrigération par compression de gaz comme illustré à la figure 1.1. Au point 1, la magnétisation, correspondant à la compression du gaz, entraîne l'augmentation de température du matériau magnétique par l'effet magnétocalorique. Ensuite, le matériau magnétique étant toujours soumis au champ magnétique, un rejet de chaleur est effectué permettant au matériau de revenir à son état initial de température. À l'étape suivante, la détente du gaz est associée à la démagnétisation adiabatique pendant laquelle la température du matériau magnétique atteint une température plus basse que sa température initiale grâce à l'effet magnétocalorique. Finalement, le cycle est complété lorsque le matériau magnétique absorbe la chaleur d'une source extérieure pour revenir à

son état initial de température. À ce moment, la température de cette source extérieure est plus basse qu'elle l'était initialement, d'où l'effet de réfrigération.

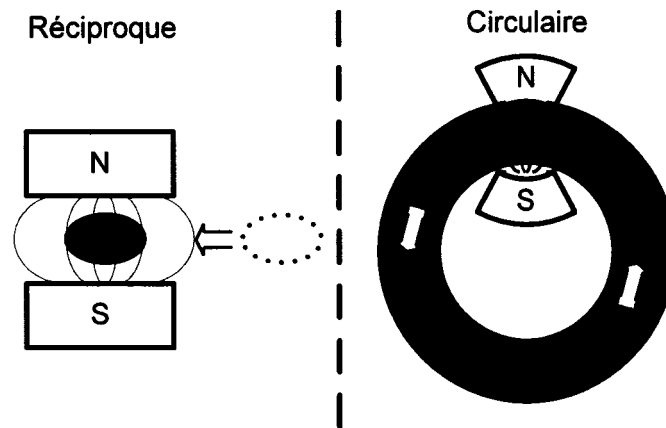


Figure 1.2 : Configurations réciproque et circulaire

Typiquement, un réfrigérateur magnétique comporte un pôle dont la forme est fonction de la configuration d'aimant utilisée pour produire le champ qui règne dans celui-ci. La matérialisation du cycle thermodynamique s'effectue généralement selon l'une ou l'autre des deux configurations présentées à la figure 1.2. Pour la configuration réciproque, le matériau magnétique fait une suite aller-retour dans le pôle magnétique réalisant ainsi plusieurs cycles de magnétisation-démagnétisation. Pour la configuration circulaire, le matériau magnétique est généralement sous forme de granules qui baignent dans un fluide, lequel se déplace dans le champ magnétique selon une certaine fréquence de rotation. Toutefois, relativement à l'effet magnétocalorique, ces deux configurations sont équivalentes. En effet, ce dernier est causé par la variation de champ magnétique générée par le mouvement d'entrée-sortie dans le pôle magnétique; que ce mouvement soit sur une trajectoire circulaire ou linéaire importe peu.

3. La problématique du calcul de l'efficacité

Le cycle de base de réfrigération magnétique décrit à la section précédente considère que les échanges de chaleur entre le matériau magnétique et le fluide régénérateur puis entre le fluide régénérateur et les sources chaude et froide sont idéaux. C'est-à-dire que toute

l'énergie magnétique injectée au système par l'application du champ magnétique est utilisée pour l'effet de réfrigération. En réalité, les échanges thermiques qui surviennent lors d'un cycle de réfrigération magnétique ne sont que partiels et il est impossible pour le matériau magnétique de revenir exactement à son état de température initial après un cycle complet. Mise à part la contribution des phénomènes d'échange thermique non idéaux aux irréversibilités du cycle de RM, il existe aussi une contribution provenant de l'interaction du matériau magnétique avec le champ magnétique appliqué.

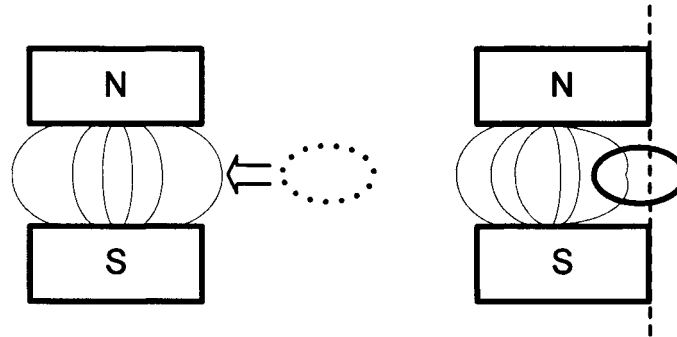


Figure 1.3 : Perturbation du champ magnétique et réduction dans le matériau magnétique

La distribution du champ magnétique dans le pôle des aimants est perturbée par l'introduction du matériau magnétique tel qu'illustré par le schéma des lignes iso champs à la figure 1.3. Ajouté à cet effet, l'intensité du champ magnétique à l'intérieur du matériau magnétique est généralement moins élevée que celle dans le pôle lorsque le champ appliqué est de faible intensité. Entre autres termes, l'intensité du champ magnétique perçue par le matériau magnétique est moins importante que la valeur effective dans le pôle lorsque celui-ci est vide. Puisque l'ampleur de l'EMC augmente avec le champ perçu par le matériau magnétique, une partie de l'énergie magnétique générée par les aimants ne contribue pas à la production de froid. Ces pertes magnétiques, mentionnées par Brown dès 1976 dans son article désormais classique [4], sont toujours négligées quand vient le temps de caractériser l'effet magnétocalorique de matériaux magnétiques. Lorsque l'évaluation théorique de l'effet magnétocalorique est privilégiée face à sa mesure, le champ magnétique à l'intérieur du matériau magnétique est supposé uniforme et égal au champ appliqué [17], [19], [39].

Dai et son équipe sont les premiers à avoir tenté de quantifier l'impact sur l'EMC de la réduction de l'intensité du champ magnétique dans le matériau magnétique [11]. En utilisant le concept de champ effectif, la réduction de l'EMC a été calculée pour la géométrie bidimensionnelle présentée à la figure 1.4. Des feuilles minces de gadolinium sont disposées dans le pôle d'aimants permanents de Nd-Fe-B. Pour une telle configuration, la réduction de l'EMC au point de curie est approximativement de 30% lorsque le champ produit par les aimants est de 0.366 teslas. D'une façon moins approfondie que celle de Dai et son équipe, Rowe a aussi étudié la réduction de l'intensité du champ magnétique sans toutefois présenter l'impact sur l'EMC [34].

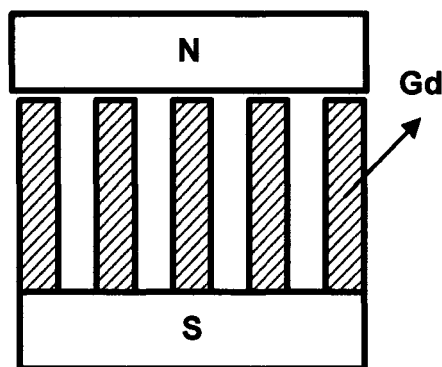


Figure 1.4 : Configuration étudiée par Dai [11]

En plus de l'intensité du champ magnétique, l'EMC possède aussi une dépendance sur la température à laquelle le matériau magnétique se trouve juste avant que celui-ci subisse une variation de température. En fait, comme il sera expliqué plus loin, la valeur de l'EMC est maximum autour de la température de Curie. Lorsque le matériau magnétique chevauche le pôle magnétique et la zone de champ nul, l'EMC altère la température dans une partie du matériau uniquement. Pendant un court instant lors du cycle de magnétisation ou de démagnétisation, un échange de chaleur peut survenir à la zone de chevauchement tel qu'illustré à la figure 1.5. Ainsi, s'ajoutant à son non uniformité spatiale, l'EMC possède un caractère transitoire jusqu'ici négligé dans toutes les études sur la RM.

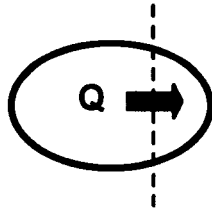


Figure 1.5 : Échange de chaleur 'Q' à la zone de chevauchement

La dépendance complexe de l'EMC sur la température et l'intensité du champ magnétique rend son évaluation difficile. Les travaux de Dai ne peuvent rendre compte de la nature transitoire ainsi que de la distribution spatiale tridimensionnelle non uniforme de l'EMC. Pour ce faire, il est essentiel de formuler les interrelations selon les lois physiques fondamentales sans utiliser le concept de quantité effective. La détermination de l'efficacité de la RM nécessite la connaissance de la quantité de réfrigération qu'il est possible d'extraire d'un système donné. Le calcul de l'EMC est à la base de l'évaluation de la réfrigération disponible. Une meilleure connaissance de l'EMC est donc au cœur d'une meilleure caractérisation de l'efficacité d'un réfrigérateur magnétique.

4. Définition du projet

L'objectif de ce projet de recherche est de quantifier les impacts de la réduction de l'intensité du champ magnétique dans le gadolinium ainsi que des échanges de chaleur sur la valeur de son effet magnétocalorique. La petite dimension physique du réfrigérant magnétique rend la mesure expérimentale de ces effets pratiquement impossible. Puisque les variables physiques en jeu présentent des interrelations complexes, l'évaluation de ces effets doit être effectuée par un calcul numérique. Le présent travail s'inscrit donc dans un effort de modélisation des phénomènes magnéto thermiques reliés à l'effet magnétocalorique. Une plaque mince tridimensionnelle de gadolinium constitue le domaine de calcul. La solution numérique de la température et de l'intensité du champ magnétique est réalisée en régime transitoire; ce qui signifie que le mouvement d'entrée-sortie dans le pôle magnétique est considéré selon la fréquence d'opération prescrite. De

plus, les propriétés physiques du gadolinium pertinentes au projet ont été étudiées à l'aide de modèles théoriques et de mesures.

Le manuscrit est composé de trois chapitres. Le premier chapitre présente la physique de l'effet magnétocalorique de même que sa formulation mathématique. Le second chapitre décrit le modèle numérique; sa géométrie, les équations solutionnées, la méthodologie de résolution, le calcul des propriétés physiques, sa validation ainsi que plusieurs considérations numériques. Le chapitre trois présente les résultats et l'analyse de ceux-ci selon deux approches; les effets locaux et les effets globaux.

Chapitre 1

Effet magnétocalorique

L'effet magnétocalorique est une propriété intrinsèque que possèdent tous les matériaux magnétiques. Toutefois, sa valeur varie énormément en fonction du comportement magnétique propre au matériau. Ce comportement peut être de nature paramagnétique, ferromagnétique, ferrimagnétique ou antiferromagnétique. Le chapitre qui suit présente une description sommaire de la théorie décrivant l'effet magnétocalorique.

1.1 Magnétisation et domaines magnétiques

Chaque atome d'un matériau possède un moment magnétique net qui est la somme du spin de ses électrons. La somme du moment magnétique net de tous les atomes contenus dans une unité de volume du matériau magnétique représente la magnétisation [7].

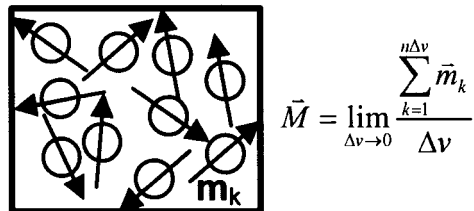


Figure 1.6 : Définition de la magnétisation

Dans le cas d'un matériau magnétique, les atomes dans un état de spin similaire ont tendances à se regrouper pour former des zones distinctes pour lesquelles la magnétisation est saturée. Les domaines magnétiques, qui contiennent en moyenne 1×10^{20} atomes, ont des orientations diverses générant une magnétisation totale nulle tel qu'illustré à la figure 1.7. Les domaines magnétiques s'organisent ainsi dans le but d'atteindre un état d'énergie magnétique minimum. Lorsqu'un champ magnétique est appliqué à un matériau magnétique, une magnétisation totale non nulle est générée selon deux mécanismes. Si le champ magnétique appliqué est intense, la magnétisation de chacun des domaines se réoriente dans la direction du champ externe.

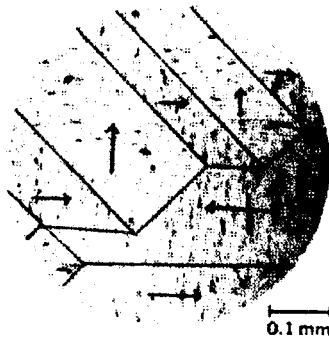


Figure 1.7 : Domaines magnétiques [8]

Si le champ magnétique est faible, les domaines magnétiques qui sont dans la même direction que le champ subissent une expansion au détriment des autres domaines tel qu'illustré à la figure 1.8. Lorsqu'une substance est pure, la réorganisation des domaines magnétiques est généralement considérée instantanée. Dans le cas contraire, un délai de magnétisation peut dépendre de la présence d'atomes de carbone dans des sites interstitiels de la matrice du composé ou encore de fluctuations thermiques de certains domaines magnétiques [23]. Ces considérations sont particulières à un échantillon de matériau magnétique.

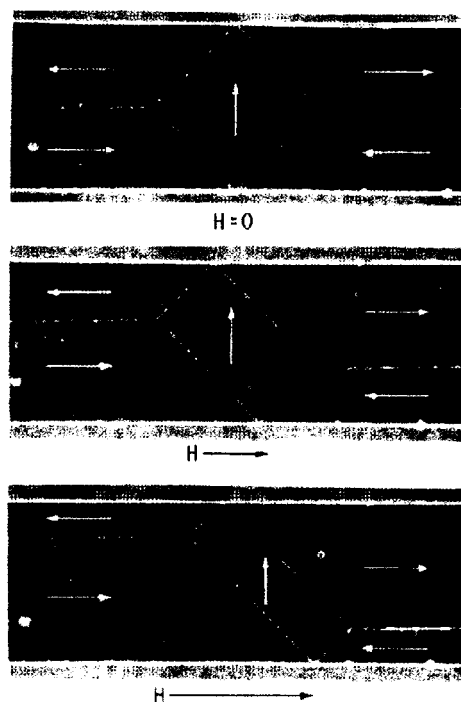


Figure 1.8 : Réorganisation des domaines magnétiques sous un champ externe [23]

C'est la variation de la magnétisation qui est la source de l'effet magnétocalorique. L'évolution de l'état quantique d'un atome lors de la magnétisation et de la démagnétisation permet de mettre en évidence la relation physique entre les variations de magnétisation et de température. La température est une variable thermodynamique qui représente la variation du nombre d'état d'énergie par rapport à l'énergie tel que présentée à l'équation 1.1.

$$\frac{1}{T} \propto \frac{\partial \Omega}{\partial E} \cong \frac{\Delta \Omega}{\Delta E} \quad (1.1)$$

Lors de la magnétisation, l'énergie magnétique est directement absorbée par les spins électroniques de l'atome modifiant la configuration de ses niveaux d'énergie tel qu'illustré aux points 1 et 2 de la figure 1.9. Puisque les espaces relatifs entre les niveaux d'énergie sont plus élevés et que le nombre d'état reste le même, le rapport $\Delta \Omega / \Delta E$ diminue et la température augmente d'après l'équation 1.1. Au point 3, le rejet de chaleur concentre la population électronique de l'atome vers le niveau fondamental d'énergie. Le retrait du champ ramène les espaces relatifs entre les niveaux d'énergie à leurs valeurs initiales générant une baisse de température cohérente avec l'augmentation du rapport $\Delta \Omega / \Delta E$.

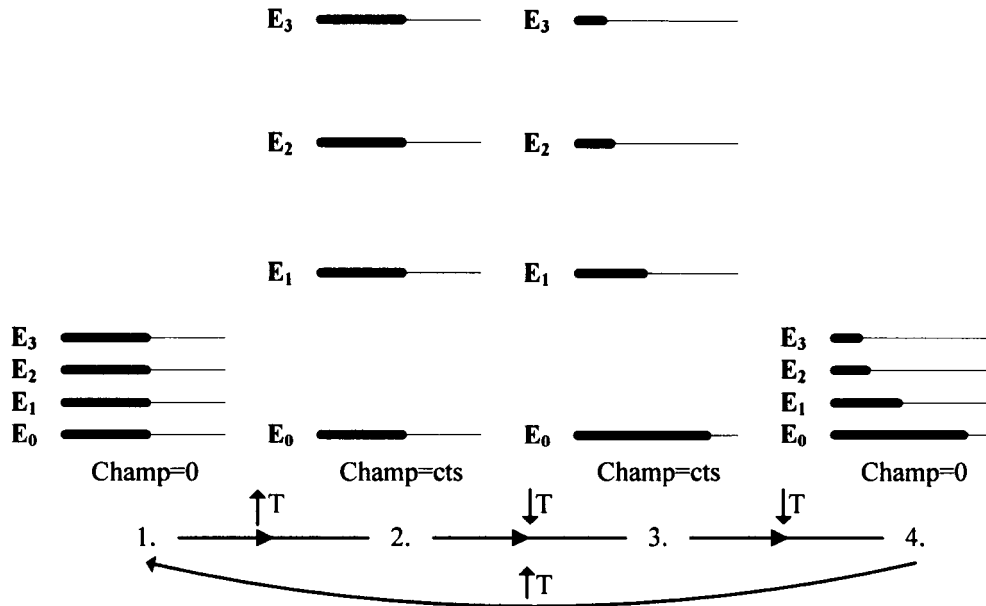


Figure 1.9 : État quantique d'un atome en relation avec l'EMC

Suite à la magnétisation, la distribution énergétique des électrons à l'état 4 est modifiée relativement à l'état 1. En effet, le passage des électrons des niveaux énergétiques supérieurs vers ceux d'énergie inférieure engendre une distribution non-uniforme. Cette nouvelle distribution indique une diminution de la température initiale. La distribution de l'état 1 est réobtenue lorsque le matériau restitue la quantité de chaleur évacuée.

1.2 Transition de phase magnétique

À basse température, l'énergie magnétique nécessaire pour modifier l'orientation des spins atomiques est moindre puisque l'excitation thermique est minimum. L'application d'un champ magnétique de faible intensité à un matériau paramagnétique entraîne une variation de magnétisation suffisante pour générer une augmentation de température notable. À température ambiante et avec un champ magnétique faible, la variation de magnétisation n'influe pas de façon assez importante la configuration des niveaux d'énergie atomique qui est dominée par la composante thermique de l'énergie. Il est donc difficile d'obtenir une augmentation de température avec un matériau paramagnétique selon ces conditions.

Toutefois, les matériaux ferromagnétiques subissent une transition de phase magnétique à une température définie comme étant le point de Curie. Sous le point de Curie, le matériau adopte un comportement ferromagnétique et passé le point de Curie, il adopte un comportement paramagnétique. Ce type de transition est souvent classifié comme de second ordre dans la littérature [23], [34]. Le comportement ferromagnétique est expliqué par le concept de l'énergie d'échange qui représente l'interaction des charges électroniques d'atomes voisins. L'énergie d'échange tend à aligner les moments magnétiques des atomes voisins créant les domaines magnétiques saturés tels que décrits à la section précédente. L'agitation thermique s'oppose à l'effet d'alignement de l'énergie d'échange et l'ordre local qui définit les domaines magnétiques s'estompe à plus haute température. La magnétisation subit donc une variation brusque à la température de Curie générant une valeur maximum de l'EMC. L'EMC associé à une

transition de phase est suffisamment élevée uniquement aux températures près du point de Curie où la variation de magnétisation survient.

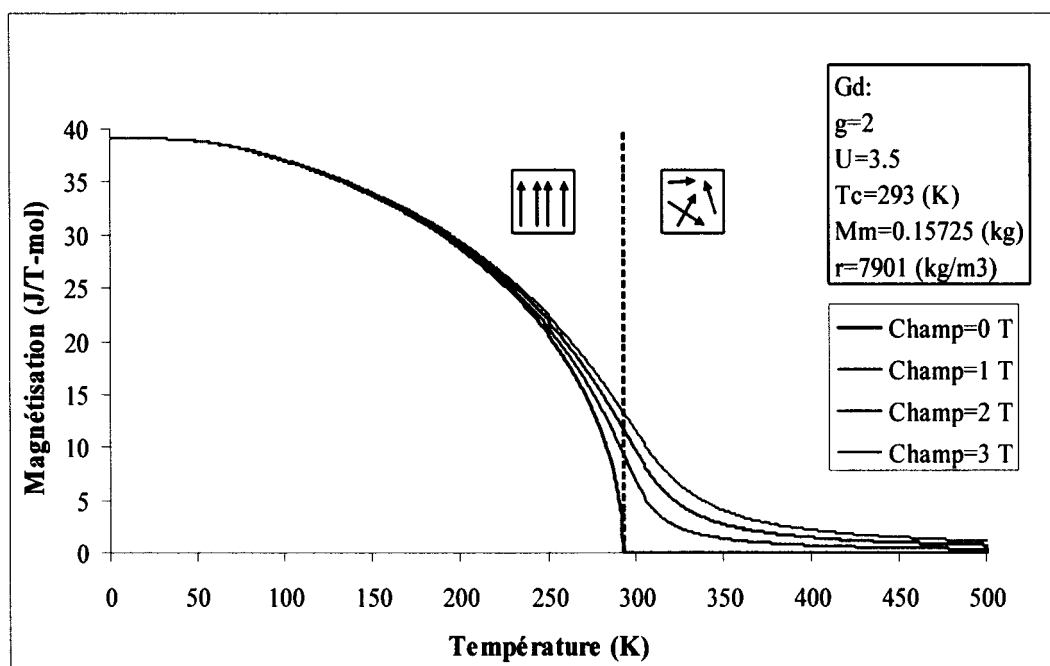


Figure 1.10 : Transition de phase magnétique de second ordre pour le gadolinium

Le gadolinium présente une transition de phase du second ordre à 293 K justifiant son utilisation en guise de réfrigérant pour des systèmes de RM opérant à température ambiante. Certains alliages de gadolinium présentent une transition de phase magnétique couplée à une transition de phase cristallographique générant un EMC accru au voisinage du point de Curie. C'est le cas du composé de $\text{Gd}_5(\text{Si}_x\text{Ge}_{1-x})_4$ dont l'EMC peut atteindre 3.6 K/T [39].

1.3 Modèle statistique

1.3.1 Entropie et température

L'EMC est quantifié par la variation de température adiabatique ou de façon équivalente, par la variation d'entropie magnétique. L'entropie est une variable qui décrit le degré d'ordre d'un système. Lorsque le système de spins d'un matériau ferromagnétique est

aligné par l'application d'un champ externe, l'entropie diminue parce que le système est plus ordonné. Une fois le champ retiré, l'entropie augmente pour atteindre sa valeur initiale à cause du retour au désordre du système de spins. Pour un matériau ferromagnétique, l'entropie peut être scindée en trois composantes; l'entropie magnétique, l'entropie de réseau et l'entropie électronique. Seule l'entropie magnétique dépend de l'intensité du champ magnétique représentée par H . La variation de cette dernière permet de quantifier la variation de l'ordre du système de spins et par conséquent l'augmentation de la température lors du processus isotherme du cycle de RM.

$$S(T, H) = S_M(T, H) + S_R(T) + S_E(T) \quad (1.2)$$

Selon la relation de Maxwell, la variation de l'entropie par rapport au champ est égale à la variation de la magnétisation par rapport à la température [31], [39].

$$\left(\frac{\partial S(T, H)}{\partial H} \right)_T = \left(\frac{\partial S_M(T, H)}{\partial H} \right)_T = \left(\frac{\partial M(T, H)}{\partial T} \right)_H \quad (1.3)$$

Puisque la variation de l'entropie totale par rapport au champ magnétique n'implique que l'entropie magnétique selon l'équation 1.2, la relation 1.3 peut-être intégrée pour générer la relation 1.4 qui permet de calculer la variation de l'entropie magnétique lors d'une magnétisation ou d'une démagnétisation.

$$\Delta S_M(T, \Delta H) = \int_{H_1}^{H_2} \left(\frac{\partial M(T, H)}{\partial T} \right)_H dH \quad (1.4)$$

À pression constante, la variation totale de l'entropie est fonction uniquement de la température et du champ magnétique.

$$dS = \frac{\partial S}{\partial T} dT + \frac{\partial S}{\partial H} dH \quad (1.5)$$

Selon le cycle idéal de RM, la variation d'entropie est nulle puisque la démagnétisation est considérée comme adiabatique. En utilisant la relation de Maxwell dans l'expression 1.5 puis en égalisant à zéro, l'équation 1.6 est obtenue.

$$\frac{\partial S}{\partial T} dT = -\frac{\partial S}{\partial H} dH = -\frac{\partial M}{\partial T} dH \quad (1.6)$$

La variation de l'entropie par rapport à la température constitue la définition de la capacité calorifique. Celle-ci est substituée dans 1.6 pour obtenir 1.7.

$$C_p(H, T) = T \frac{\partial S}{\partial T} \Rightarrow \frac{C_p(T, H)}{T} dT = -\frac{\partial M}{\partial T} dH \quad (1.7)$$

L'intégration de l'équation 1.7 par rapport au champ magnétique permet de déterminer la valeur de la variation de température.

$$\Delta T_{ad}(T, \Delta H) = - \int_{H_1}^{H_2} \frac{T}{C_p(T, H)} \left(\frac{\partial M(T, H)}{\partial T} \right)_H dH \quad (1.8)$$

Lors de la magnétisation, la variation de température est positive et la variation d'entropie magnétique est négative. L'inverse est vrai lors de la démagnétisation. Les relations 1.4 et 1.8 sont donc réversibles. L'évaluation des équations 1.4 et 1.8 nécessite la connaissance de la magnétisation et de la capacité calorifique. Il est donc requis de disposer d'expressions pour les trois composantes de l'entropie d'après la définition de la capacité calorifique présentée à l'équation 1.7.

Entropie magnétique

Un groupe de N atomes ferromagnétiques assujettis à un champ magnétique H_0 s'apparente à un ensemble canonique pour lequel la fonction de partition est recherchée. Cette dernière décrit les états d'énergie que le système peut prendre et permet de déduire

les propriétés physiques macroscopiques telles que la magnétisation et l'entropie magnétique. L'équation 1.9 présente le hamiltonien Ψ d'un atome compris dans un tel système [31].

$$\Psi_j = -g\mu_B H_0 U_{jn} - 2JU_{jn} \sum_{k=1}^n U_{kn} \quad (1.9)$$

Le premier terme du hamiltonien représente l'énergie de l'atome dans le champ magnétique externe. Le second terme est l'énergie reliée à l'interaction du spin de l'atome avec le spin atomique de ses n plus proches voisins selon le modèle d'Ising. Dans sa forme exacte, le hamiltonien 1.9 ne permet pas de former une fonction de partition analytique. L'approximation du champ moléculaire (ACM), aussi nommée approximation de Weiss, considère que l'atome j interagit avec ses plus proches voisins par le biais d'un champ moyen. L'atome j perçoit alors un champ effectif qui est la somme du champ appliqué et du champ moléculaire noté par H_m .

$$2J \sum_{k=1}^n U_{kn} \cong 2J \overline{\sum_{k=1}^n U_{kn}} = g\mu_B H_m \quad (1.10)$$

$$\Psi_j = -g\mu_B U_{jn} (H_0 + H_m) \quad (1.11)$$

Les états de spin que peut adopter un atome sont limités par la théorie quantique selon la loi présentée en 1.12. Ceci permet de fixer une limite sur le nombre d'états d'énergie disponibles pour l'atome définissant la fonction de partition atomique Z_j .

$$U_{jn} = m \quad m = -U, -U+1, \dots, U \quad (1.12)$$

$$Z_j = \sum e^{-\Psi / kT} = \sum_{m=-U}^{m=U} e^{g\mu_B m (H_0 + H_m) / kT} = \sum_{m=-U}^{m=U} e^{\eta m} \quad (1.13)$$

La fonction de partition 1.13 est une série géométrique de raison e^η dont la somme est un rapport de sinus hyperboliques. L'entropie magnétique et la magnétisation découlent directement de la fonction de partition. L'équation 1.18 est la fonction de Brillouin et

l'équation 1.19 est le rapport de l'énergie magnétique sur l'énergie thermique tel qu'introduit à l'équation 1.13.

$$Z_j = \frac{\sinh[(U + 1/2)\eta]}{\sinh(\eta/2)} \quad (1.15)$$

$$M(H, T) = NkT \frac{\partial(\ln Z_j)}{\partial(H_0 + H_m)} = Ng\mu_B UB_U(\eta) \quad (1.16)$$

$$S_M = Nk(\ln Z_j - \beta \frac{\partial \ln Z_j}{\partial \beta}) = Nk \left\{ \ln \left[\frac{\sinh(\eta(U + 1/2))}{\sinh(\eta/2)} \right] - \eta UB_U(\eta) \right\} \quad (1.17)$$

$$B_U(\eta) = \frac{1}{U} \{ (U + 1/2) \coth[(U + 1/2)\eta] - (1/2) \coth(\eta/2) \} \quad (1.18)$$

$$\eta = \frac{g\mu_B(H_0 + H_m)}{kT} \quad (1.19)$$

$$\lambda = \frac{3kT_c}{N(g\mu_B)^2 U(U + 1)} \Rightarrow H_m = \lambda M \quad (1.20)$$

Le graphique de la magnétisation en fonction de la température pour divers champs magnétiques externes présenté à la figure 1.10 est construit à l'aide de la relation implicite 1.16.

Entropie de réseau

Les atomes d'un solide peuvent entrer en vibration selon les trois directions spatiales. Le modèle de l'oscillateur harmonique est utilisé pour décrire les modes de vibration d'un atome selon chacune des directions. Ainsi, la description des modes de vibrations de N atomes interdépendants se réduit à la résolution de $3N$ oscillateurs harmoniques indépendants. L'énergie d'un oscillateur harmonique unidimensionnel dans un état quantique n_r est donnée par 1.21.

$$\varepsilon_r = (n_r + 1/2)\hbar\omega_r \quad (1.21)$$

L'énergie associée au solide tridimensionnel est donc la somme de l'équation 1.21 selon les $3N$ modes de vibration possibles. La constante χ est généralement définie telle qu'elle représente l'énergie de liaison par atome du solide à la température du zéro absolu.

$$E = V_0 + \sum_{r=1}^{3N} (n_r + 1/2) \hbar \omega_r \quad (1.22)$$

$$-N\chi = V_0 + \frac{1}{2} \sum_r \hbar \omega_r \Rightarrow E = -N\chi + \sum_{r=1}^{3N} n_r \hbar \omega_r \quad (1.23)$$

Selon la même définition qu'à la section précédente, la fonction de partition du système se présente comme l'équation 1.24. La fonction de partition se décompose en un produit de séries géométriques qui peut être ramené à une simple somme avec l'application du logarithme naturel tel que requis par la définition de l'entropie présentée à l'équation 1.17.

$$Z = \sum e^{-\beta E} = \sum_{n_1, n_2, \dots} e^{-\beta (-N\chi + n_1 \hbar \omega_1 + n_2 \hbar \omega_2 + \dots + n_{3N} \hbar \omega_{3N})} = e^{\beta N\chi} \left(\sum_{n_1=0}^{\infty} e^{-\beta \hbar \omega_1 n_1} \right) \dots \left(\sum_{n_{3N}=0}^{\infty} e^{-\beta \hbar \omega_{3N} n_{3N}} \right) \quad (1.24)$$

$$\ln Z = \beta N\chi - \sum_{r=1}^{3N} \ln(1 - e^{-\beta \hbar \omega_r}) \cong \beta N\chi - \int_0^{\infty} \ln(1 - e^{-\beta \hbar \omega}) \sigma(\omega) d\omega \quad (1.25)$$

Étant donné que les fréquences des modes de vibration sont très rapprochées, la somme présente dans l'équation 1.25 peut être transformée en intégrale avec $\sigma(\omega)$ la distribution en fréquence des modes de vibration. Cette distribution est définie selon l'approximation de Debye. Cette dernière traite le réseau atomique comme un milieu continu pour lequel les modes de vibrations deviennent des modes de propagation. Les modes de propagation équivalents sont des ondes de longueur d'onde définie. Si la longueur d'ondes des modes est plus grande que la séparation inter atomique du solide, le déplacement des atomes sera approximativement le même formant ainsi un continuum tel que postulé par Debye. Le déplacement est ainsi solution de l'équation d'onde permettant de déduire la relation 1.26 pour la distribution en fréquence des modes. La fréquence de coupure de Debye correspond approximativement au cas où la longueur d'onde équivalente devient du

même ordre de grandeur que la séparation inter atomique et le solide ne possède aucun mode de vibration.

$$\sigma(\omega) = \begin{cases} \frac{3V}{2\pi^2 c_s^3} \omega^2 & \omega \leq \omega_D \\ 0 & \omega > \omega_D \end{cases} \quad (1.26)$$

La relation 1.26 est substituée dans la relation 1.25 pour générer l'expression de l'entropie de réseau calculée selon la définition 1.17 répétée en 1.27.

$$S_R = Nk(\ln Z_j - \beta \frac{\partial \ln Z_j}{\partial \beta}) = Nk \left\{ -3 \ln[1 - e^{-(T_D/T)}] + 12 \left(\frac{T}{T_D} \right)^3 \int_0^{T_D/T} \frac{v^3}{e^v - 1} dv \right\} \quad (1.27)$$

Entropie électronique

Les électrons font partie de la classe des fermions. Ils se soumettent ainsi au principe d'exclusion de Pauli qui stipule qu'il ne peut y avoir deux électrons dans le même état quantique. L'atteinte de la configuration de plus faible énergie se réalise par l'accumulation des électrons sur le niveau inoccupé de plus faible énergie jusqu'à ce que tous les électrons soient accommodés.

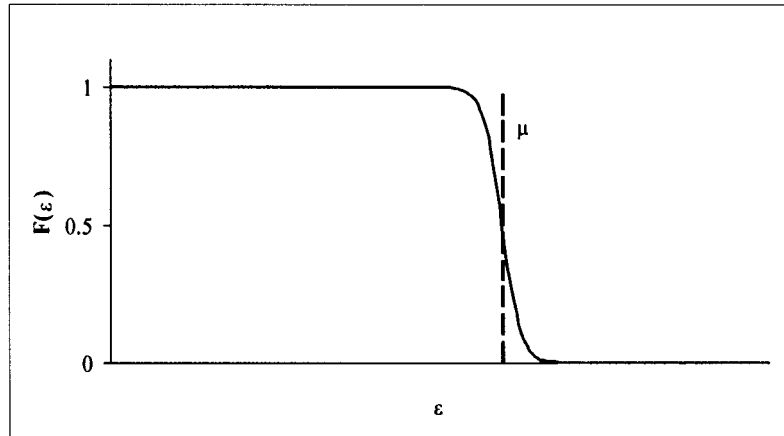


Figure 1.11 : Distribution de Fermi (équation 1.28) pour les électrons à température fixe

$$F(\varepsilon) = \frac{1}{e^{(\varepsilon - \mu) / kT} + 1} \quad (1.28)$$

Même à basse température, l'énergie moyenne des électrons est relativement élevée par rapport au cas où tous les électrons pourraient occuper le niveau fondamental d'énergie. La distribution de Fermi, présentée à l'équation 1.28, est définie en fonction de l'énergie ε , de l'énergie thermique kT et d'une quantité μ représentant l'énergie de Fermi. La section constante de la distribution de Fermi, lorsque $\varepsilon \ll \mu$, représente les niveaux d'énergie totalement occupés par les électrons. Lors d'un changement de température, ces niveaux restent inchangés et ne contribuent pas à la variation de l'énergie moyenne du solide. La capacité calorifique n'est donc pas affectée par les électrons qui appartiennent aux niveaux d'énergie saturés. C'est ce qui explique la surestimation de la capacité calorifique électronique par la théorie de la physique classique telle que présentée à l'équation 1.29.

$$C_p^{(E)} = \frac{3}{2} Nk \quad (1.29)$$

Ce sont plutôt les électrons avec des énergies $\varepsilon \sim \mu$ situés dans une région d'étendue approximative de kT autour de μ qui contribuent à la capacité calorifique électronique. Le nombre d'électrons actifs N dans l'équation 1.29 est donc réduit d'un facteur approximatif de kT/μ . La capacité calorifique électronique possède alors une dépendance linéaire en température. La constante de proportionnalité γ est définie comme le coefficient de capacité calorifique électronique. Celui-ci est mesuré à basse température où la contribution du réseau est négligeable. D'après la définition de la capacité calorifique en 1.7, l'expression pour l'entropie électronique est déduite.

$$C_p^{(E)} \cong \left(\frac{3N}{2\mu} \right) T \cong \gamma T \Rightarrow S_E = \gamma T \quad (1.30)$$

1.3.2 Capacité calorifique

L'évaluation théorique de la capacité calorifique nécessite la combinaison des expressions de l'entropie magnétique, de l'entropie de réseau et de l'entropie électronique. La relation 1.31 constitue le modèle du champ moléculaire pour la capacité calorifique.

$$C_p(T, H) = T \left(\frac{\partial S_M(T, H)}{\partial T} + \frac{\partial S_R(T)}{\partial T} + \frac{\partial S_E(T)}{\partial T} \right) \quad (1.31)$$

Les effets de la transition de phase magnétique de second ordre que présente le gadolinium se répercutent aussi sur la capacité calorifique de ce dernier qui augmente de façon brusque au voisinage du point de Curie. Comme l'illustre la figure 1.12, le modèle du champ moléculaire ne génère pas des valeurs de capacité calorifique près des valeurs expérimentales lorsque la température se rapproche de la température de Curie, c'est-à-dire vers la valeur de 1 sur l'axe normalisé de la figure 1.12. Bien que l'écart diminue avec l'augmentation du champ, le modèle du champ moléculaire n'est pas valide près de la température de Curie. Cette difficulté est contournée par l'utilisation de mesures en fonction du champ et de la température. Cet aspect sera présenté au chapitre suivant.

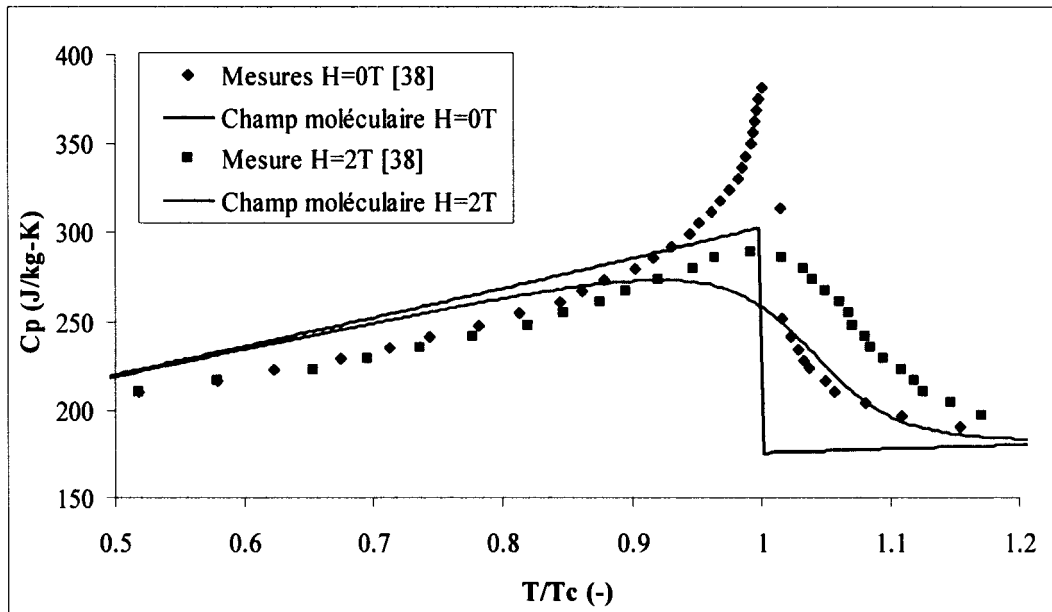


Figure 1.12 : Capacité calorifique du gadolinium; calculée avec 1.31 versus mesurée

Chapitre 2

Modèle

2.1 Géométrie et maillage

La géométrie modélisée s'inspire des premiers travaux effectués en réfrigération magnétique à température ambiante réalisés par Brown [4] et plus récemment des travaux de l'équipe du Laboratoire d'Électrotechnique de Grenoble [9]. Dans les deux cas, le réfrigérant est sous forme de plaques minces. Les dimensions de la plaque sont choisies en supposant que le champ magnétique externe est produit par un aimant permanent. Jusqu'à présent, les aimants permanents les plus performants sont construits par l'assemblage de huit ou neuf sections d'aimants agencées de façon circulaire ou elliptique selon le théorème de Halbach [18]. Ce dernier démontre que le champ magnétique sera maximum dans la zone centrale si la direction de magnétisation est perpendiculaire à la longueur de l'aimant et si elle varie graduellement de 0 à 360 degrés comme illustré à la figure 2.1. La région centrale constitue le pôle magnétique.

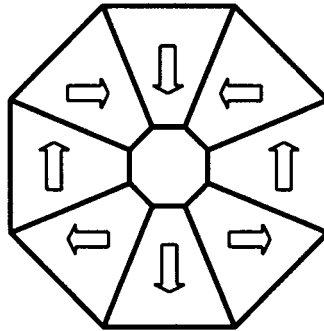


Figure 2.1 : Section transversale d'un aimant permanent construit selon le principe de Halbach

Pour ce genre de configuration, un champ maximum situé entre 1 et 2 teslas est présent dans le pôle magnétique dont la hauteur n'est jamais plus grande que 1 pouce [24], [25], [26]. Généralement, la dimension longitudinale du pôle est légèrement supérieure à 100 mm. Les caractéristiques géométriques du pôle de l'aimant doivent être prises en considération pour le choix des dimensions de la plaque.

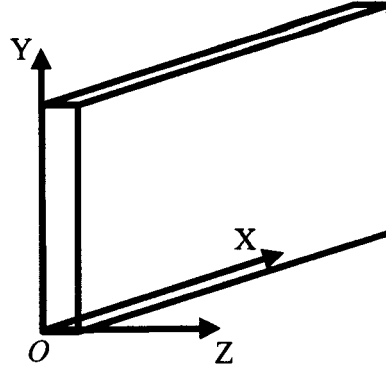


Figure 2.2 : Plaque mince modélisée

Ainsi, les dimensions ont été choisies comme une hauteur de 25 mm, une longueur de 100 mm et une épaisseur de 2 mm. Le maillage généré est uniforme selon les trois directions cartésiennes dont l'origine est située à un angle du parallélépipède tel qu'illustré à la figure 2.2. Le nombre de nœuds selon les directions x , y et z est respectivement de 101, 126 et 5 portant le nombre total de nœuds à 63 630.

2.2 Équation magnétostatique

2.2.1 Potentiel magnétique scalaire

Le champ magnétique est quantifié par les vecteurs d'induction magnétique B et d'intensité magnétique H . L'induction magnétique est définie comme étant le flux magnétique par unité de surface. L'intensité magnétique H constitue l'unité absolue de mesure du champ magnétique. Dans la formulation générale, la somme de la magnétisation et de l'intensité magnétique correspond à l'induction magnétique tel que décrit par l'équation 2.1 [2], [7];

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu \vec{H} \quad (2.1)$$

où la perméabilité magnétique μ est décrite par l'équation 2.2 en introduisant la notion de perméabilité relative.

$$\mu = \mu_0 \mu_r = \mu_0 \left(\frac{M}{H} + 1 \right) \quad (2.2)$$

Cette propriété décrit la relation entre l'intensité du champ magnétique et la magnétisation générée par celui-ci. Comme il sera montré plus loin, la perméabilité magnétique des matériaux ferromagnétiques, tel que le gadolinium, varie avec la température à cause de leur magnétisation.

La solution magnétique consiste à déterminer la distribution du champ magnétique au sein du matériau H_M soumis à une induction externe B . La relation entre les deux grandeurs est illustrée à la figure 2.3.

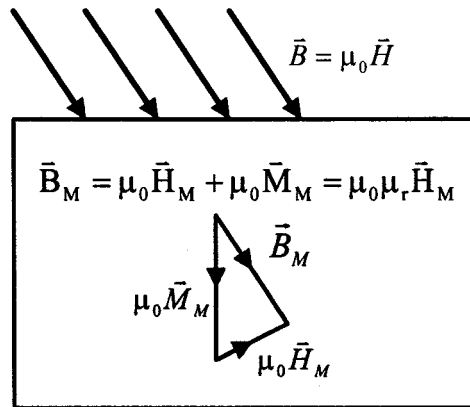


Figure 2.3 : Solution magnétostatique

Si le matériau est non magnétique, aucune magnétisation n'est générée et la perméabilité se réduit à la perméabilité du vide qui vaut $4\pi \times 10^{-7}$ H/m. Dans ce cas, l'interface magnétique n'existe pas et par conséquent l'induction et l'intensité magnétique sont linéairement dépendantes. Lorsque le matériau est ferromagnétique, les vecteurs magnétiques ne sont pas obligatoirement dans la même direction à cause de la variation de la perméabilité magnétique avec le champ et la température. Aussi, la relation entre les vecteurs magnétiques, telle que schématisée à la figure 2.3, peut varier avec la position dans le matériau ferromagnétique. Ces deux aspects justifient l'utilisation du concept de potentiel magnétique scalaire qui élimine le caractère vectoriel de la solution. En

l'absence de courant, le rotationnel de l'intensité magnétique est nul. L'application du rotationnel sur un champ vectoriel généré par un gradient est toujours nulle. L'intensité magnétique peut donc être définie par le gradient d'un potentiel scalaire.

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = 0 \Rightarrow \vec{H} = -\vec{\nabla}\varphi \quad (2.3)$$

L'induction magnétique est un champ solénoïdal puisque les lignes de champ magnétique se referment toujours sur elles-mêmes. En substituant successivement les relations 2.1 et 2.3 dans la relation suivante :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.4)$$

on obtient l'équation du potentiel magnétique scalaire :

$$\vec{\nabla} \cdot (\mu_r(H, T) \vec{\nabla}\varphi) = 0 \quad (2.5)$$

La différence de potentiel entre deux points d'un milieu définit la relation entre le potentiel magnétique scalaire et l'induction magnétique tel que :

$$\varphi_2 - \varphi_1 = - \int_{p_1}^{p_2} \frac{\vec{B} \cdot d\vec{l}}{\mu} \quad (2.6)$$

$d\vec{l}$ étant le vecteur reliant les points p_1 et p_2 .

2.2.2 Clarification de la démagnétisation

Si la perméabilité relative est constante, la relation 2.5 se réduit à l'équation de Laplace. Pour certaines géométries simples, l'équation de Laplace possède des solutions analytiques qui peuvent être mises sous la forme de l'équation 2.7.

$$H_M = H - N_d M_M \quad (2.7)$$

L'intensité magnétique dans le matériau est ainsi réduite d'une valeur généralement notée comme le champ de démagnétisation avec N_d le facteur de démagnétisation [34]. Pour un problème plus complexe, le facteur de démagnétisation est une fonction de la position dans le matériau. La démagnétisation est donc intrinsèque à la solution du problème magnétostatique et les quantités définies perdent leur signification pour des géométries plus complexes.

Il est généralement plus approprié d'utiliser le terme démagnétisation pour décrire le retrait du champ magnétique lors du cycle de RM. Ce processus est souvent illustré par la courbe d'hystérésis d'un matériau magnétique qui permet de schématiser l'impact de la magnétisation en mettant en évidence la dépendance du champ H par rapport au champ B [2]. Les courbes rouge et noire de la figure 2.4 représentent respectivement la démagnétisation et la magnétisation.

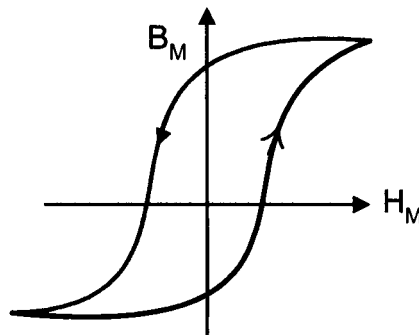


Figure 2.4 : Courbe d'hystérésis

2.3 Équation thermique

2.3.1 Équation d'énergie

Les phénomènes d'échange thermique dans la plaque mince de gadolinium sont décrits par l'équation d'énergie. En supposant que le régime est transitoire et que la conductivité est isotrope, le bilan d'énergie s'exprime comme [22] :

$$\rho C_p(H, T) \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T + S_T(H, T) \quad (2.8)$$

L'équation 2.8 comprend respectivement de gauche à droite le terme d'accumulation, le terme de diffusion et le terme de source. Le terme de source modélise l'augmentation de température reliée à l'EMC qui n'est pas incluse dans le bilan énergétique lors de la dérivation de l'équation 2.8.

2.3.2 Terme de source

L'EMC entraîne une augmentation de la température lorsque la variation de l'intensité du champ magnétique est positive et une diminution dans le cas contraire. La relation 1.8 est utilisée pour former un terme de source S_T qui génère de façon naturelle la variation de température reliée à l'EMC tel que présenté à la relation 2.9 où Δt représente l'incrément de temps pour la résolution de 2.8.

$$S_T = \frac{\rho C_p(H, T) \Delta T_{ad}(T, \Delta H)}{\Delta t} = - \frac{\rho C_p}{\Delta t} \int_{H_1}^{H_2} \frac{T}{C_p(T, H)} \left(\frac{\partial M(T, H)}{\partial T} \right) dH \quad (2.9)$$

S_T constitue ainsi une source ou un puit d'énergie par unité de volume. La figure 2.5 illustre la dépendance du terme de source sur la variation de champ magnétique. Lors de la magnétisation, le terme de source est positif et il y a augmentation de la température. Lors de la démagnétisation, le terme de source est négatif et il y a baisse de la

température. Lors de l'évaluation de 2.9, il est nécessaire de conserver l'intensité magnétique à chacun des nœuds de calcul pour disposer de la variation de celle-ci au pas de temps suivant.

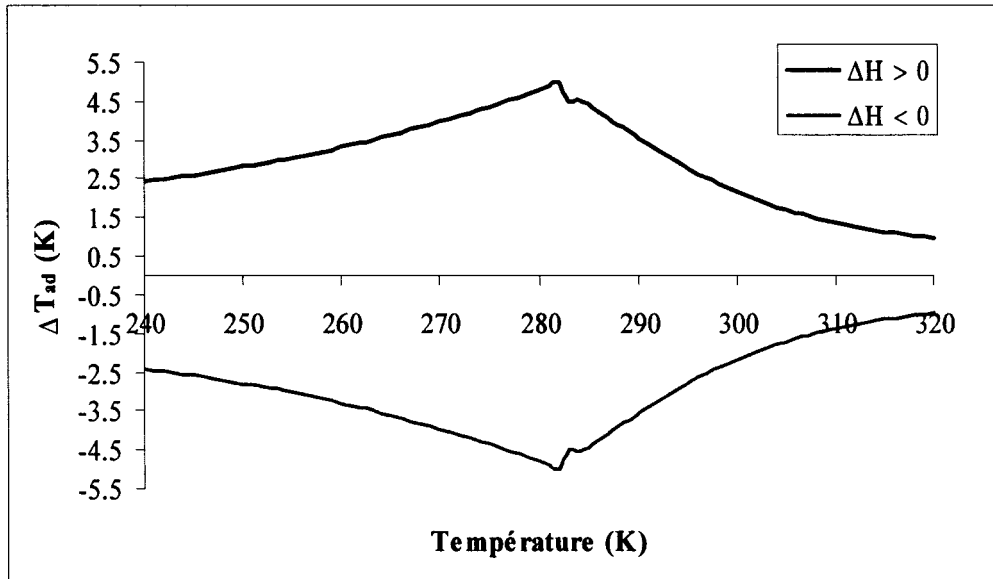


Figure 2.5 : ΔT_{ad} du gadolinium en fonction de la température pour une variation de champ de ± 2 teslas

2.4 Couplage des équations magnétostatique et thermique

2.4.1 Méthodologie de résolution

La solution des équations 2.5 et 2.8 est effectuée de façon simultanée. Le processus de calcul, tel que présenté à la figure 2.6, est calqué sur les étapes du cycle de RM. L'entrée ou la sortie de la plaque de gadolinium dans le pôle magnétique induit une variation de la distribution de l'intensité du champ magnétique dans celle-ci. Cette étape correspond au calcul de la perméabilité magnétique et à la solution de l'équation magnétostatique 2.5. La distribution du champ magnétique est obtenue par le gradient tridimensionnel du potentiel scalaire. L'EMC qui découle de la variation de l'intensité magnétique génère une variation de la température du gadolinium. Ceci correspond à la solution de l'équation d'énergie avec l'incorporation du terme de source. Puisque la perméabilité

magnétique est fonction de la température, l'altération du champ de température affecte la distribution du potentiel magnétique scalaire. Ainsi, le processus décrit reprend jusqu'à ce que le nombre d'itérations requises soit atteint. En somme, le champ de température dépend du champ magnétique par le biais du terme de source et de la capacité calorifique; tandis que le champ magnétique dépend de la température par le biais de la perméabilité magnétique.

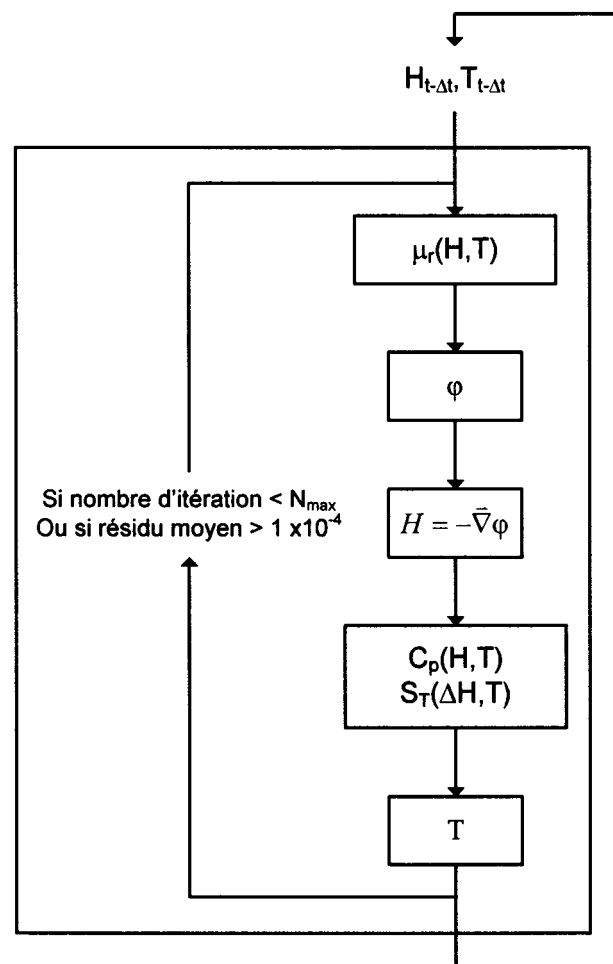


Figure 2.6 : Organigramme de solution pour chaque nœud de calcul et chaque incrément de temps

2.4.2 Conditions aux limites et conditions initiales

Puisque l'objectif principal est de quantifier l'impact de la réduction de l'intensité magnétique sur l'EMC, les frontières du domaine de calcul sont considérées comme

adiabatiques. Ainsi il n'existe aucun échange de chaleur entre le matériau et le milieu extérieur. Dans ce cas, les gradients de température dans la direction normale aux six faces de la plaque sont nuls (conditions de Neumann) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial x} &= 0 \quad \text{pour} \quad x = 0 \quad \text{et} \quad x = L \\ \frac{\partial T}{\partial y} &= 0 \quad \text{pour} \quad y = 0 \quad \text{et} \quad y = h \\ \frac{\partial T}{\partial z} &= 0 \quad \text{pour} \quad z = 0 \quad \text{et} \quad z = l\end{aligned} \quad (2.10)$$

Une température uniforme est imposée en guise de condition initiale pour la résolution de 2.8. Celle-ci est située au voisinage de la température de Curie pour générer un EMC maximum.

Pour ce qui est des conditions aux limites magnétiques, le champ dans le pôle est orienté dans la direction perpendiculaire à l'axe xOz tel qu'illustré sur la coupe transversale de la figure 2.7 [11], [24], [25], [26]. L'induction magnétique appliquée à la plaque a une valeur constante de B_0 T.

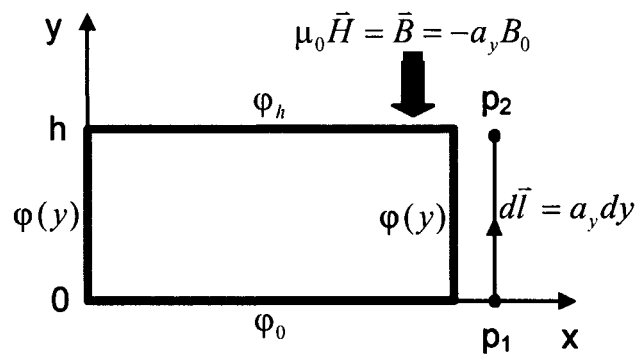


Figure 2.7 : Conditions aux limites en potentiel magnétique scalaire

L'équation 2.6 définit le lien entre l'induction magnétique et le potentiel magnétique scalaire. Appliquée sur le vecteur défini par les points p_1 et p_2 situés à l'extérieur de la

plaque, celle-ci permet de définir la valeur du potentiel magnétique aux frontières de la plaque.

$$\varphi(y) - \varphi_0 = - \int_0^y \frac{-a_y B_0 \cdot a_y dy}{\mu_0} = \frac{B_0 y}{\mu_0} \quad (2.11)$$

Ainsi, le potentiel appliqué aux faces orientées parallèlement au champ magnétique est une fonction linéaire de la position en y dont le gradient génère une induction uniforme dans un milieu non magnétique. Le potentiel à $y=0$ constitue la valeur de référence qui est toujours choisie au voisinage de l'unité pour faciliter l'évaluation des gradients. De plus, l'inverse de la perméabilité du vide, présent dans l'équation 2.11, est de l'ordre de 10^7 , générant des valeurs de potentiel magnétique relativement grandes. Tel que mis en évidence à la section précédente, le gradient du potentiel magnétique constitue la variable d'intérêt. Dans ce contexte, la perméabilité magnétique du vide est éliminée de l'équation 2.11 permettant de générer des valeurs de potentiel près de l'unité et d'effectuer le calcul des gradients avec plus de précision. La substitution de l'expression 2.11 par l'expression 2.12 altère uniquement la valeur absolue du potentiel et laisse inchangée la variation de celui-ci.

$$\varphi(y) = B_0 y + \varphi_0 \quad (2.12)$$

Le mouvement du matériau par rapport au pôle magnétique est simulé par le déplacement uniforme des conditions aux limites sur le potentiel magnétique selon l'axe Ox (figure 2.8). Le déplacement en fonction du temps est exprimé en définissant la fréquence d'opération f pour laquelle un cycle correspond à la magnétisation et la démagnétisation. Ainsi, il y a déplacement relatif de la plaque d'une distance de $2L$ par cycle ou L est la longueur de la plaque. Le produit de la vitesse de la plaque $2Lf$ avec l'incrément de temps Δt est l'incrément de position Δx de l'interface magnétique.

$$\Delta x = 2Lf\Delta t \quad (2.13)$$

L'incrément de position permet de fixer une limite au-dessus de laquelle les conditions frontières de champ nul sont appliquées. La position de l'interface magnétique représentant la ligne de démarcation de la partie du matériau sous l'effet du champ magnétique et de la partie se trouvant en dehors de celui-ci et est exprimée en fonction de Δx et du temps comme :

$$x_t = \begin{cases} x_{t-\Delta t} + \Delta x & \text{si } \Delta H > 0 \\ x_{t-\Delta t} - \Delta x & \text{si } \Delta H < 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

Lors de la magnétisation le déplacement est ajouté à la position de l'interface au pas de temps précédent alors que l'incrément est retranché lors de la démagnétisation. La fonction de Heaviside illustrée à la figure 2.8 permet d'introduire le caractère transitoire des conditions aux limites sur le potentiel. Le produit de celle-ci avec l'équation 2.12 ajuste la valeur du potentiel aux frontières de la plaque en fonction de la position effective de l'interface.

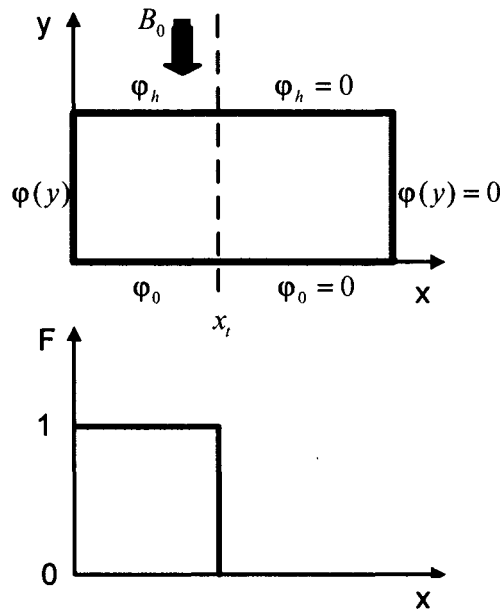


Figure 2.8 : Déplacement des conditions aux limites

$$F(x,t) = \begin{cases} 1 & x \leq x_t \\ 0 & x > x_t \end{cases} \quad (2.15)$$

$$\Phi(x,y,t) = F(x,t)\varphi(y) \quad (2.16)$$

Il existe une symétrie pour les distributions thermique et magnétique au sein du matériau selon la direction Oz telle qu'indiqué à la figure 2.9. Le domaine de calcul est ainsi réduit de moitié diminuant par le fait même le temps de calcul et la mémoire requise.

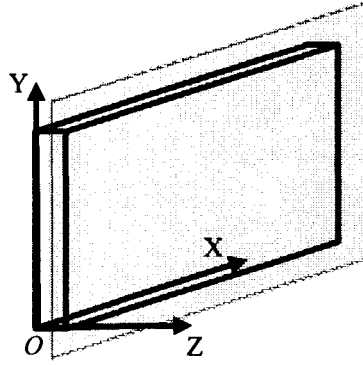


Figure 2.9 : Plan de symétrie

Selon les hypothèses introduites, les conditions aux limites magnétiques sont :

$$\begin{aligned} \text{à } y=0 \quad \text{et } \forall z \quad \varphi(x,0,t) &= F(x,t)\varphi_0 \\ \text{à } y=h \quad \text{et } \forall z \quad \varphi(x,h,t) &= F(x,t)(B_0h + \varphi_0) \\ \text{à } x=0 \quad \text{et } \forall z \quad \varphi(0,y,t) &= F(x,t)(B_0y + \varphi_0) \\ \text{à } x=L \quad \text{et } \forall z \quad \varphi(L,y,t) &= F(x,t)(B_0y + \varphi_0) \\ \text{à } z=0 \quad \varphi(x,y,t) &= F(x,t)(B_0y + \varphi_0) \\ \text{à } z=\frac{l}{2} \quad \frac{\partial \varphi(x,y,t)}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

et les conditions initiales sont :

$$\begin{aligned} \text{à } t=0 \quad \varphi(x,y,z) &= 0 \\ \text{à } t=0 \quad T(x,y,z) &= T_0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

2.5 Propriétés physiques du gadolinium

Le tableau 2.1 regroupe les propriétés physiques du gadolinium nécessaires à la solution simultanée des équations 2.5 et 2.8. La dépendance de la perméabilité magnétique relative et de la capacité calorifique sur la température et l'intensité de champ magnétique est traitée plus bas.

Tableau 2.1 Propriétés physiques du gadolinium

g	2
U	3.5
T_C	281.67 K
T_D	172 K
γ	0.0109 J/K/mole
ρ	7910 kg/m ³
m_m	0.15725 kg/mole
k	10 W/m-K
$\mu_r(H,T)$	Section 2.5.1
$C_p(H,T)$	Section 2.5.2

2.5.1 Perméabilité magnétique

La quantification de la perméabilité magnétique indépendamment de la géométrie de l'échantillon est nécessaire afin de solutionner l'équation du potentiel magnétique 2.5. Telle que définie par la relation 2.2, la perméabilité magnétique est fonction de la magnétisation et de l'intensité magnétique au sein du gadolinium. Les mesures de la magnétisation sont réalisées en fonction de l'intensité magnétique appliquée sur l'échantillon et non en fonction de l'intensité magnétique à l'intérieur de celui-ci. C'est pour cette raison que l'échantillon est sous forme de disque, de cylindre ou de sphère [6] permettant de définir un facteur de démagnétisation tel que présenté à l'équation 2.7.

Les mesures de magnétisation sont réalisées sur un échantillon sphérique de gadolinium en faisant varier l'intensité du champ magnétique et la température. Le champ magnétique externe est varié dans l'intervalle de 0 à 5 teslas pour des températures variant entre 260 et 320 K dont l'incrément correspond à 5 K excepté au voisinage de la température de Curie, où l'incrément est réduit à 2 K.

Les données de magnétisation recueillies sont présentées à la figure 2.10 pour trois températures choisies. L'effet de la transition de phase magnétique est illustré à la figure 2.10 par la diminution de la magnétisation avec l'augmentation de la température.

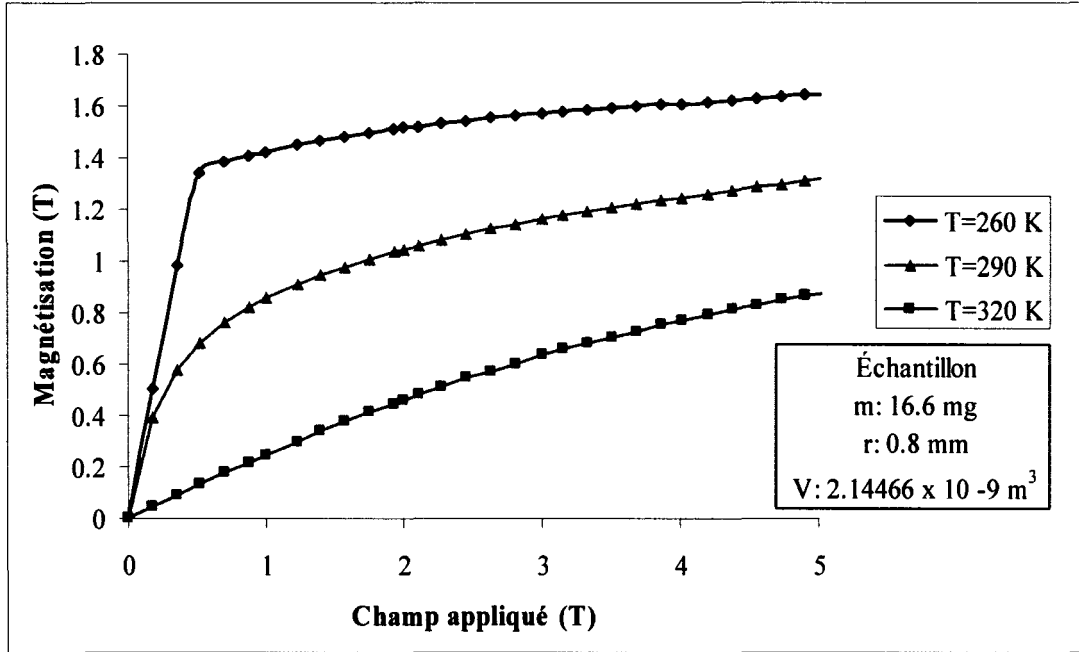


Figure 2.10 : Magnétisation en fonction du champ appliqué pour un échantillon sphérique de gadolinium

Les mesures expérimentales sont exploitées afin de déduire la variation de la perméabilité magnétique relative en fonction de la température et du champ magnétique. Pour ce faire, l'expression suivante est utilisée :

$$\mu_r(H, T) = \frac{M(H, T)}{H_{appliqué} - \frac{1}{3}M(H, T)} + 1 \quad (2.19)$$

Puisque l'échantillon est sphérique, le facteur de démagnétisation vaut 1/3 [2]. Une fois traitées, les mesures génèrent une série d'isothermes de perméabilité magnétique en fonction de l'intensité magnétique à l'intérieur de l'échantillon tel qu'illustré à la figure 2.11.

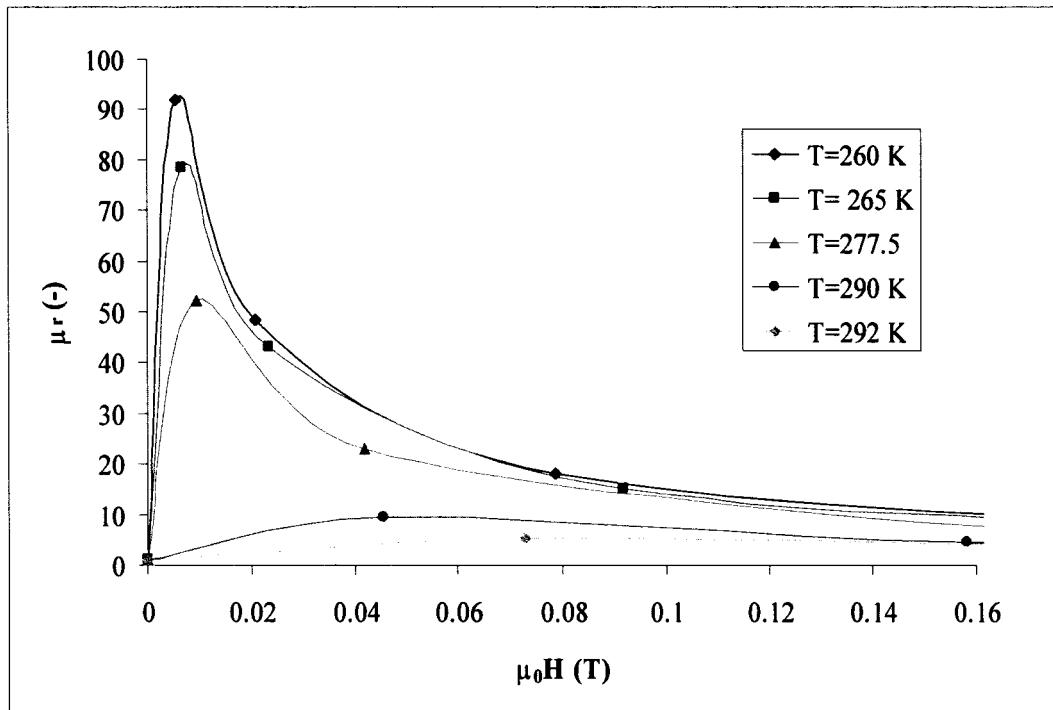


Figure 2.11 : Données de perméabilité magnétique relative pour le gadolinium

Les variations les plus importantes de la perméabilité magnétique surviennent lorsque l'intensité magnétique est plus petite que 0.1 teslas. Dans cette région, il existe des maximums atteints lorsque la température est sous le point de Curie. Ceci indique que la magnétisation est relativement importante même lorsque le champ magnétique est bas. À mesure que le champ magnétique augmente, la magnétisation sature et la perméabilité magnétique devient linéaire. L'utilisation de régressions pour la modélisation numériques des données de perméabilité magnétique est inappropriée. La variation importante de la perméabilité à bas champ et la forte dépendance de la solution du potentiel magnétique sur celle-ci justifie l'utilisation d'une double interpolation; en intensité magnétique puis en température comme illustré à la figure 2.12. Tout d'abord, l'intervalle en température est fixé à l'aide de la température prescrite. Pour chacune des températures correspond une série de données de perméabilité en fonction de l'intensité magnétique. À l'aide de l'intensité magnétique prescrite, une interpolation selon l'intensité magnétique est réalisée pour chacune des températures. Une interpolation rationnelle permet de modéliser la décroissance de la perméabilité après le maximum jusqu'à 0.5 teslas lorsque la température est sous 290 K comme mis en évidence sur la figure 2.11. Dans tous les

autres cas l'interpolation est linéaire. Les deux valeurs de perméabilité générées sont finalement interpolées linéairement selon la température.

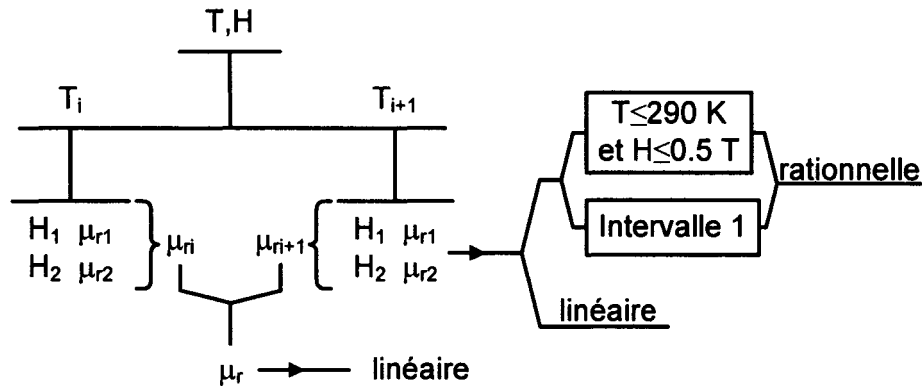


Figure 2.12 : Calcul numérique de la perméabilité à l'aide des données mesurées

2.5.2 Capacité calorifique

La capacité calorifique du gadolinium ne peut être entièrement décrite par le modèle du champ moléculaire tel que présenté à la section 1.3.2. L'approximation de Weiss qui consiste en la substitution de l'interaction magnétique mutuelle des atomes par un champ moléculaire moyen est trop drastique pour générer des valeurs justes de la capacité calorifique près de la température de Curie. Par contre, l'approximation est valide dans la région paramagnétique où la magnétisation tend vers zéro. Il existe des formulations plus complètes comme l'approximation de Bethe-Peierls-Weiss [31] qui considère l'interaction magnétique mutuelle des atomes avec leurs plus proches voisins. Toutefois, l'utilisation de données expérimentales est généralement préférée à la sophistication additionnelle de ce type de modèle pour le calcul de la capacité calorifique. Seules les mesures de capacité calorifiques à champ magnétique nul en fonction de la température sont nécessaires pour ajuster le modèle du champ moléculaire autour du point de Curie. Selon la relation 1.31, la différence de la capacité calorifique à champ non nul et à champ nul permet d'éliminer les composantes électronique et du réseau de l'entropie qui dépendent uniquement de la température.

$$C_p(H,T) - C_p(0,T) = T \left(\frac{\partial S_M(H,T)}{\partial T} - \frac{\partial S_M(0,T)}{\partial T} \right) \quad (2.20)$$

$$C_p(H,T) = C_p(0,T) - T \frac{\partial(S_M(0,T) - S_M(H,T))}{\partial T} = C_p(0,T) - T \frac{\partial(\Delta S_M(H,T))}{\partial T} \quad (2.21)$$

La capacité calorifique à champ non nul est alors obtenue par la soustraction de la composante magnétique de l'entropie à la capacité calorifique mesurée à champ nul tel que décrit par 2.21. Comme l'entropie magnétique diminue avec l'augmentation du champ, la différence à l'équation 2.21 est positive et la capacité calorifique à champ nul est plus grande qu'à champ non nul. La relation 2.21 est ainsi cohérente avec les données relatives au gadolinium présentées à la figure 1.12. Les équations 1.31 et 2.21 sont combinées pour modéliser la capacité calorifique du gadolinium sur l'ensemble de la plage en température à l'exception d'un intervalle de 48 K au-dessus de la température de Curie. La relation 2.21 est utilisée aux basses températures jusqu'à la température de Curie. La relation 1.31 est utilisée à partir de 48 K au-dessus du point de Curie jusqu'aux hautes températures. L'intervalle de 48 K est traité par une approximation linéaire basée sur les points frontières calculés selon les deux méthodes élaborées.

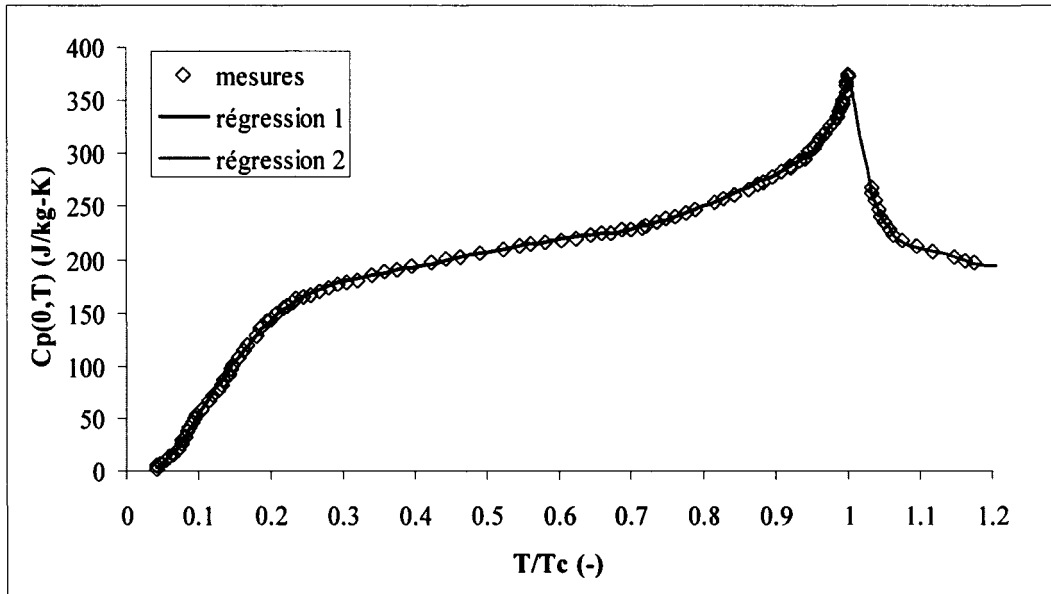


Figure 2.13 : Régressions pour les mesures de capacité calorifique à champ nul du gadolinium

La figure 2.13 présente les mesures de capacité calorifique du gadolinium à champ nul [12]. Le calcul de la capacité calorifique à champ nul dans la relation 2.21 est réalisé avec deux régressions polynomiales construites à l'aide des données mesurées.

$$C_p(0, T) = \sum_n a_n T^{n-1} \quad (2.22)$$

Le premier polynôme est effectif sous le point de Curie et le second polynôme est effectif au-dessus du point de Curie. Les coefficients polynomiaux sont présentés dans les tableaux 2.2 et 2.3. La figure 2.15 illustre aussi les deux régressions qui sont extrêmement fidèles aux mesures.

Tableau 2.2 Coefficients polynomiaux 1; $T < T_c$

Polynôme 1	
a_1	32.509981982857600000
a_2	-7.011126257524460000
a_3	0.505522349947783000
a_4	-0.011578768183649600
a_5	0.000146074004506366
a_6	-1.185587589582810000E-06
a_7	6.702788815668390000E-09
a_8	-2.711328010297980000E-11
a_9	7.546746453662740000E-14
a_{10}	-1.277154916194540000E-16
a_{11}	9.711152893564700000E-20

Tableau 2.3 Coefficients polynomiaux 2; $T > T_c$

Polynôme 2	
a_1	854177.242036641000000000
a_2	-10681.716194514500000000
a_3	50.085553883289100000
a_4	-0.104331951685545000
a_5	0.00008145957508912190

L'ajustement du modèle du champ moléculaire par l'utilisation des mesures de capacité calorifique à champ nul permet d'éviter de sous estimer la capacité calorifique du gadolinium près du point de Curie. Comme l'illustre la figure 2.14, la capacité calorifique

calculée à l'aide de l'équation 2.21 correspond très bien aux mesures pour un champ de 2 teslas. De plus, la décroissance des mesures sur la plage en température de 48 K justifie l'approximation linéaire réalisée. Au-dessus de 329 K, le modèle du champ moléculaire génère des valeurs de capacité calorifique qui sont près des mesures.

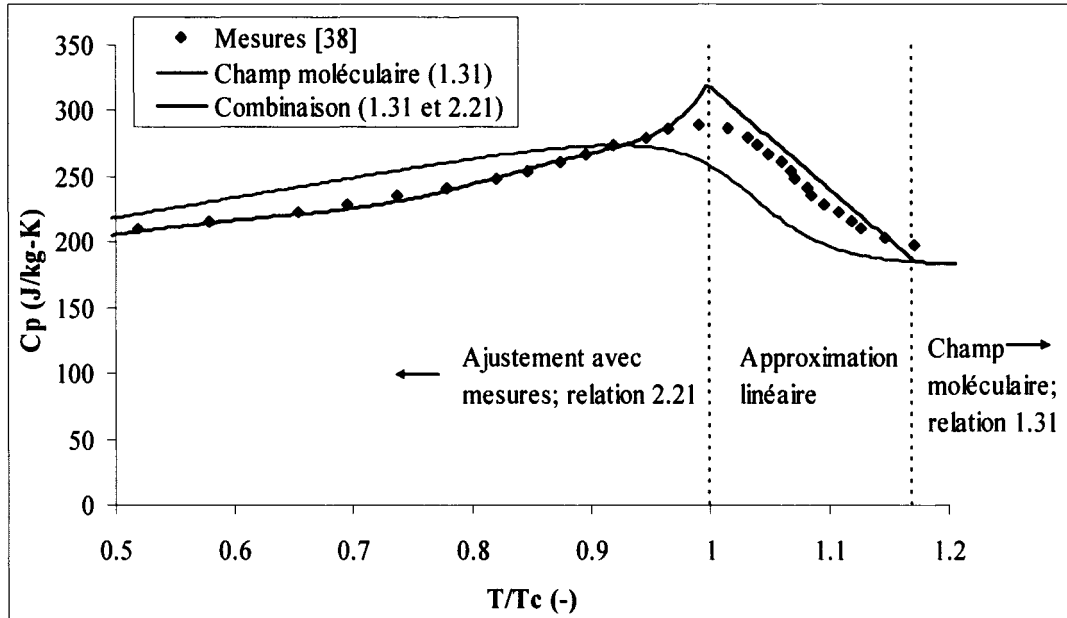


Figure 2.14 : Capacité calorifique du gadolinium pour un champ de 2 teslas; comparaison des mesures avec le modèle de calcul

2.6 Validation du modèle

La validation du modèle se scinde en deux parties distinctes; la validation de la solution numérique et l'indépendance de celle-ci sur le maillage adopté. Dans le premier volet, l'équation d'énergie et l'équation du potentiel magnétique sont validées séparément. La validation indépendante des ces deux équations permet de conclure à l'exactitude de la solution couplée.

2.6.1 Validation magnétostatique

La validation de la solution du potentiel magnétique est réalisée en supposant que la perméabilité magnétique relative est constante. L'équation 2.5 prend alors la forme de

l'équation de Laplace qui possède des solutions analytiques pour des conditions aux limites de Dirichlet ou de Neumann.

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (2.23)$$

Un champ magnétique constant orienté parallèlement à la hauteur de la plaque est appliqué sur celle-ci. La symétrie mentionnée à la section 2.4.3 n'est pas considérée lors de la validation; la dimension c selon l'axe z correspond à 2 millimètres. Dans le cas contraire, une condition au frontière de Neumann additionnelle aurait été nécessaire.

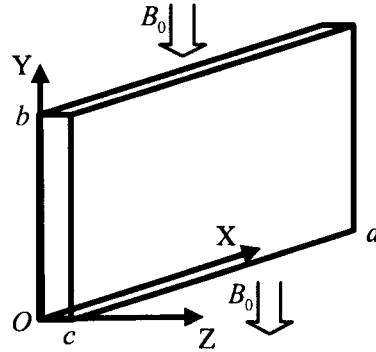


Figure 2.15 : Problème magnétique de validation

Dans ce cas, la solution de l'équation 2.23 s'écrit en terme d'une double somme infinie. La dérivation détaillée des équations 2.24, 2.25 et 2.26 est présentée à l'appendice A.

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{(2m-1)\pi z}{c}\right) [\cosh(\gamma_{mn} y) + \cosh(\gamma_{mn} (y-b))] \quad (2.24)$$

$$\gamma_{mn} = \pi \sqrt{\left(\frac{(2n-1)}{a}\right)^2 + \left(\frac{(2m-1)}{c}\right)^2} \quad (2.25)$$

$$A_{mn} = \frac{16B_0}{\mu_0 (2m-1)(2n-1)\gamma_{mn} \pi^2 \sinh(\gamma_{mn} b)} \quad (2.26)$$

Le processus de solution numérique dans le cas où la perméabilité relative est une fonction de l'intensité magnétique est en tous points identique au cas où la perméabilité

relative est une constante. La solution numérique du problème magnétique schématisé par la figure 2.15 peut ainsi être comparée à la solution analytique calculée à l'aide de la relation 2.24 dans le but de valider la solution de l'équation 2.5 pour la plaque de gadolinium.

Les doubles sommes infinies de l'équation 2.24 sont bornées par l'introduction d'une tolérance lors de leur évaluation numérique. Si le dernier terme ajouté à la somme contribue à moins de 0.1% de celle-ci, la sommation est tronquée. Pour chacun des indices n de la somme extérieure, la somme intérieure en m est effectuée jusqu'à ce que le critère de tolérance soit atteint; il en est de même pour la somme extérieure. Lors de l'évaluation numérique des sommes, une attention particulière a été portée à la fonction \cosh qui croît de façon exponentielle lorsque son argument est élevé. Lorsque y tend vers b , la valeur de $\cosh(\gamma_{mn}y)$ tend vers l'infinie alors que si y tend vers 0, c'est la valeur de $\cosh(\gamma_{mn}(y-b))$ qui tend vers l'infinie. Dans les deux cas, la formule d'addition du cosinus hyperbolique est utilisée pour éliminer ce dernier de l'équation 2.24 comme démontré en 2.27 et 2.28. Dans le premier cas, la position y est substituée par la hauteur totale de la plaque b moins l'écart pour obtenir y .

$$y \rightarrow b \left\{ \begin{array}{l} y = b - \Delta b \\ \cosh(\gamma_{mn}y) = \cosh(\gamma_{mn}b) \cosh(\gamma_{mn}\Delta b) - \sinh(\gamma_{mn}b) \sinh(\gamma_{mn}\Delta b) \\ \cosh(\gamma_{mn}y) = \coth(\gamma_{mn}b) \cosh(\gamma_{mn}\Delta b) - \sinh(\gamma_{mn}\Delta b) \end{array} \right\} \quad (2.27)$$

L'application de la formule d'addition permet d'éliminer le \cosh et le \sinh fonctions de b par une simplification avec le \sinh présent au dénominateur de l'expression 2.26 pour les coefficients de la double somme. Il reste ainsi comme fonction de b uniquement la \coth qui présente un comportement asymptotique pour de grands arguments. La même approche est appliquée au cas décrit en 2.28.

$$y \rightarrow 0 \left\{ \begin{array}{l} \cosh(\gamma_{mn}(y-b)) = \cosh(\gamma_{mn}y) \cosh(\gamma_{mn}b) - \sinh(\gamma_{mn}y) \sinh(\gamma_{mn}b) \\ \cosh(\gamma_{mn}y) = \cosh(\gamma_{mn}y) \coth(\gamma_{mn}b) - \sinh(\gamma_{mn}y) \end{array} \right\} \quad (2.28)$$

Les figures 2.16, 2.17 et 2.18 présentent les comparaisons du potentiel magnétique calculé selon la relation 2.24 et le potentiel magnétique solutionné numériquement selon l'équation 2.5. En comparant les résultats obtenus, on constate que la solution numérique concorde très bien avec la solution analytique, et ce, selon les trois directions cartésiennes.

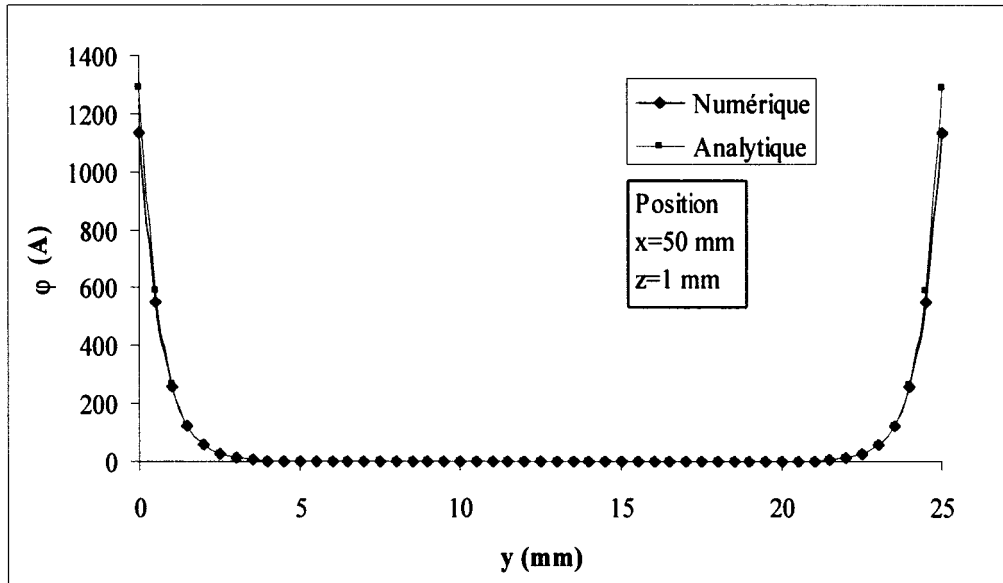


Figure 2.16 : Validation de la solution numérique du potentiel magnétique; distribution selon y

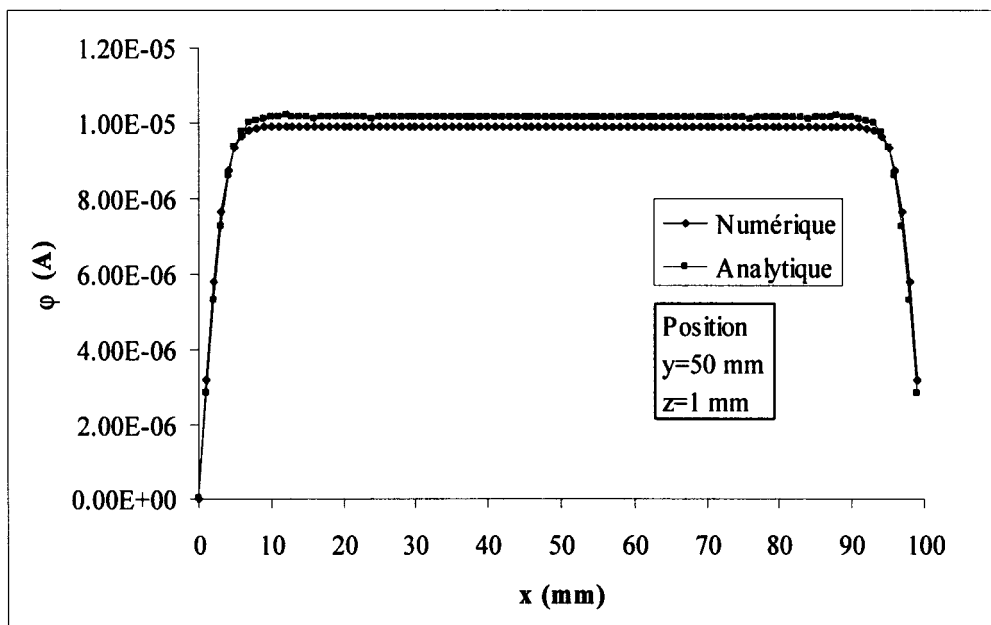


Figure 2.17 : Validation de la solution numérique du potentiel magnétique; distribution selon x

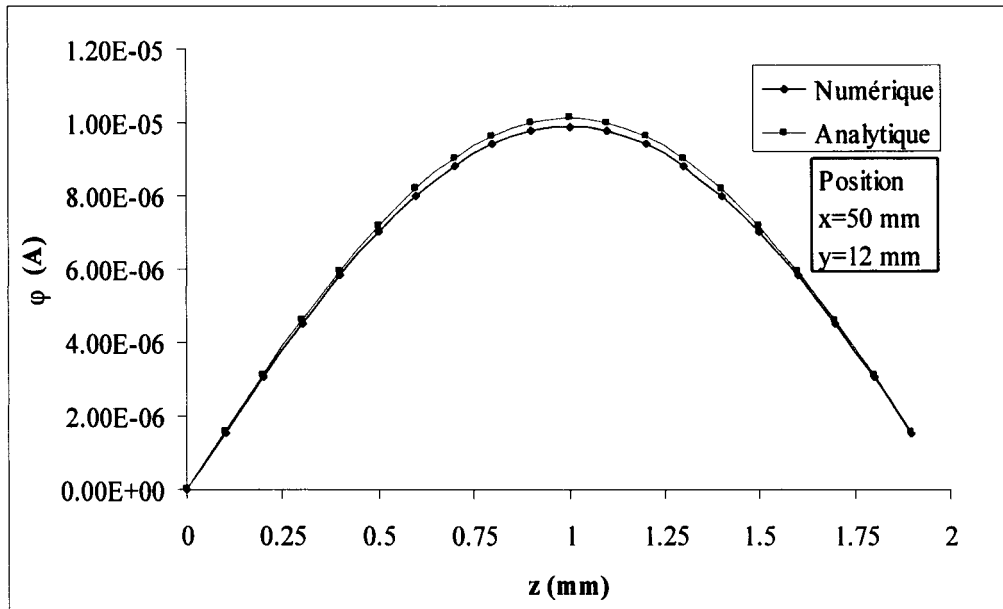


Figure 2.18 : Validation de la solution numérique du potentiel magnétique; distribution selon z

2.6.2 Validation thermique

La validation des résultats du champ thermique consiste à vérifier si l'inclusion du terme source dans l'équation d'énergie représente fidèlement l'EMC. En d'autres termes, il est essentiel de démontrer que la densité volumique d'énergie S_T génère une variation de température qui correspond à l'EMC. Pour ce faire, un cycle complet incluant la magnétisation et la démagnétisation est simulé. Puisque les conditions frontières du domaine de calcul sont adiabatiques, l'échauffement lors de la magnétisation devrait être compensé par le refroidissement lors de la démagnétisation. Ainsi, la température finale devrait tendre vers la température initiale à la fin d'un cycle complet. Effectivement, la température finale correspond à la température initiale de 281 K tel qu'illustré à la figure 2.19.

De plus, la température moyenne lorsque la plaque est entièrement dans le champ magnétique de 2 teslas est de 285.04 K. L'augmentation de température de 2 kelvins par tesla correspond aux valeurs expérimentales mentionnées dans la littérature [16], [17], [39].

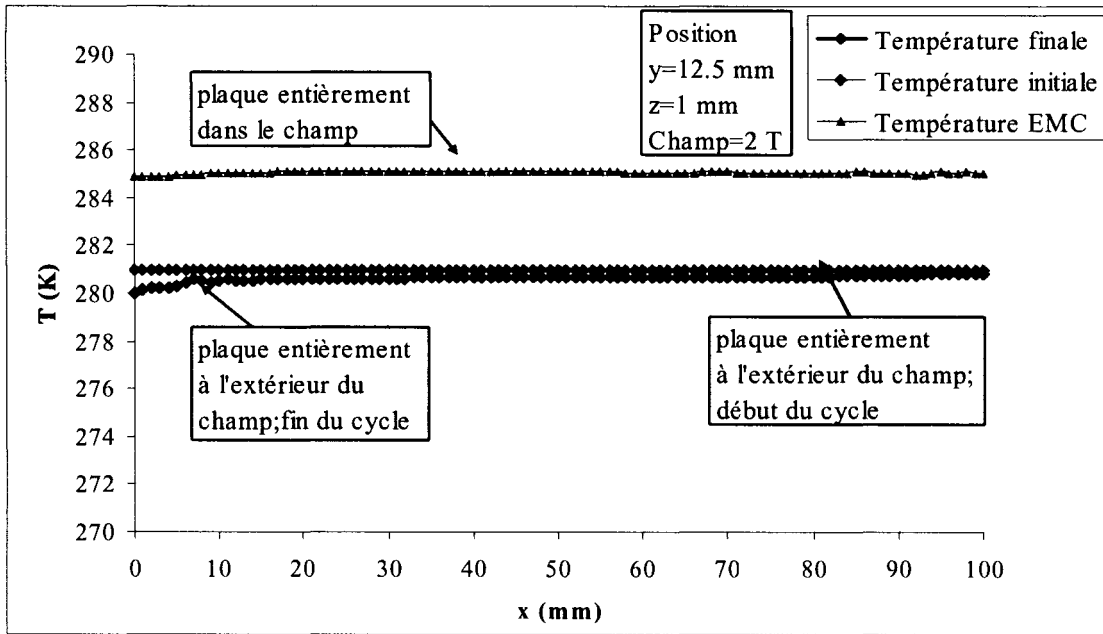


Figure 2.19 : Validation du terme de source; distribution de la température selon x après la simulation d'un cycle complet

2.6.3 Indépendance de la solution sur le maillage

Les propriétés physiques du gadolinium de même que le terme de source thermique dépendent de l'intensité du champ magnétique. Ce dernier est calculé à l'aide de la norme des gradients du potentiel magnétique. L'intensité magnétique constitue ainsi la variable la plus représentative du calcul numérique justifiant son utilisation pour la détermination de la discrétisation optimale du maillage. Ce dernier est varié afin de comparer les résultats de calcul obtenus pour les mêmes conditions de simulation. Puisque le champ magnétique appliqué est orienté selon la direction Oy , les composantes du gradient du potentiel magnétique dans les directions Ox et Oz sont comparativement beaucoup moins importantes. Les discrétisations selon Ox et Oz telles que décrites précédemment sont ainsi suffisamment fines. De ce fait, seule la discrétisation selon Oy a été augmentée jusqu'à ce que la distribution de l'intensité magnétique soit invariante. Les simulations ont été réalisées pour les conditions d'opération les plus défavorables soient; une température initiale de 281 K près du point de Curie du gadolinium et un champ appliqué maximum de 2 teslas.

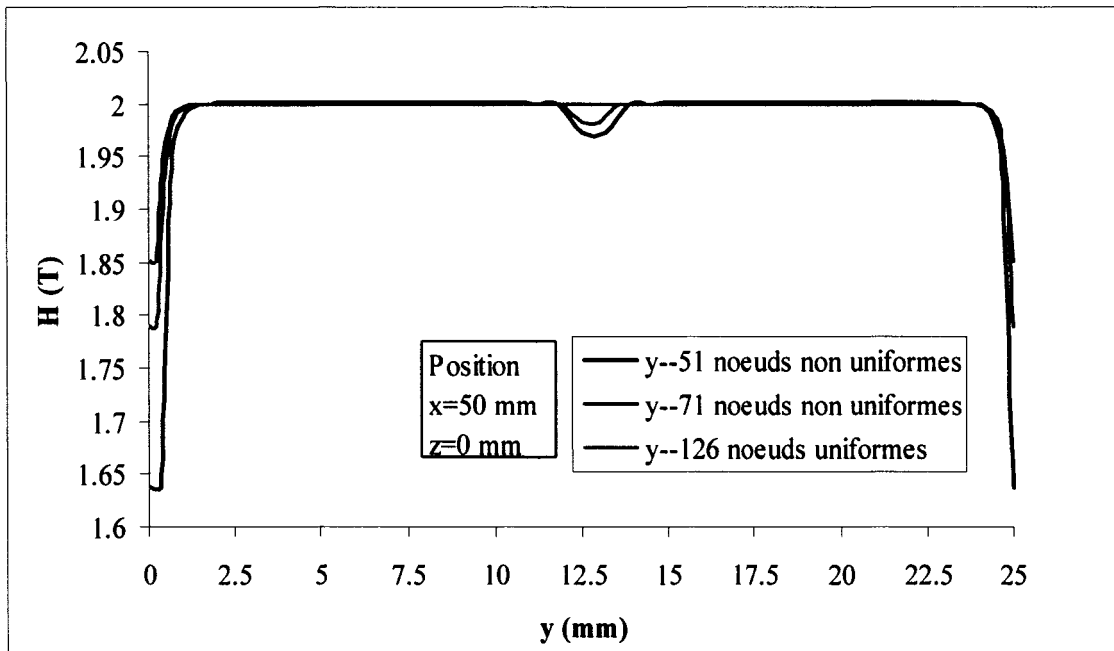


Figure 2.20 : Intensité magnétique selon Oy pour 3 maillages

La figure 2.20 illustre la répartition verticale du champ magnétique dans le matériau à $x=50$ et $z=0$ mm. On constate que la solution varie avec l'augmentation du nombre de nœuds. En effet, les solutions obtenues pour les maillages constitués de 51 et 71 nœuds selon la direction Oy présentent une fluctuation irréaliste au centre du matériau. Cependant, cette anomalie est éliminée lorsque la discrétisation selon Oy est augmenté à 126 nœuds.

La réduction de l'intensité magnétique au bord de la plaque est causée par l'interface magnétique entre le vide et le gadolinium. Toutefois, celle-ci diminue avec l'augmentation de la densité du maillage. La réduction diminue de 0.008 teslas par nœuds supplémentaires entre les cas à 51 et 71 nœuds tel qu'illustré par les courbes bleu et rouge de la figure 2.20. D'autre part, la réduction diminue de 0.001 teslas par nœuds supplémentaires entre les cas à 71 et 126 nœuds. Ceci indique une stabilisation de la solution numérique validant le choix de la discrétisation uniforme de 126 nœuds selon la direction Oy .

2.7 Considérations numériques

Des sous routines de calcul ont été développées et intégrées au code de calcul. Ces sous routines permettent l'évaluation numérique de la perméabilité magnétique, de la capacité calorifique ainsi que du terme de source. Aussi, la sauvegarde de résultats de calcul intermédiaires ainsi que le déplacement des conditions aux limites en fonction du temps sont réalisés à l'aide de sous routines. Les interactions multiples du code de calcul avec les sous routines apportent certaines considérations numériques reliées à la convergence de la solution ainsi qu'à la robustesse et à la rapidité de calcul.

2.7.1. Traitement de l'interface magnétique

Lorsque la plaque de gadolinium est située entre le pôle magnétique et le vide, le volume de la plaque qui occupe la zone de champ magnétique non nul possède une perméabilité magnétique qui peut être de 2 à 60 fois plus élevée que la perméabilité du volume de la plaque dans le vide. L'interface magnétique ainsi générée entraîne une discontinuité de la solution numérique du potentiel magnétique générant des valeurs d'intensité magnétique qui excèdent grandement l'intensité externe appliqué par le biais des conditions aux limites.

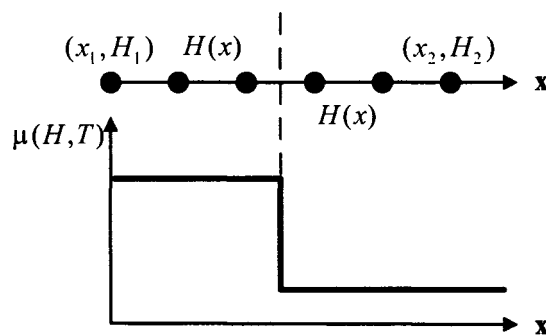


Figure 2.21 : Discontinuité de l'intensité magnétique causée par l'interface magnétique

Pour éliminer cette discontinuité, une approximation linéaire selon la direction Ox est utilisée pour les nœuds voisins de l'interface magnétique. De chaque côté de l'interface,

les valeurs de l'intensité magnétique calculées sont utilisées pour l'estimation des nœuds situés au voisinage immédiat tel que décrit par la figure 2.21 et l'équation 2.29.

$$H(x) = \frac{(H_2 - H_1)}{(x_2 - x_1)}(x - x_1) + H_1 \quad (2.29)$$

Puisque l'interface magnétique se déplace avec le temps, les nœuds pour lesquels l'intensité magnétique est calculée à l'aide de l'approximation linéaire sont relocalisés à chaque pas de calcul.

L'adoption de cette approche est justifiée par la solution obtenue avec le logiciel de simulation Flux3d; code commerciale utilisée pour la résolution de problèmes électriques et magnétiques. Le logiciel Flux3d est utilisé pour modéliser une plaque dans un domaine de calcul dont les dimensions sont beaucoup plus grandes que ceux de cette dernière. La plaque est divisée en deux volumes; les volumes de gauche et de droite possèdent respectivement des perméabilités relatives de 1.5 et 1. Une induction magnétique constante de 2 teslas est imposée dans une section du domaine incluant uniquement le volume de gauche de la plaque générant ainsi une interface magnétique tel qu'illustré à la figure 2.22. Des conditions aux limites de champ nul sont imposées uniquement aux limites du domaine permettant au potentiel magnétique de ne pas souffrir de discontinuité à l'interface magnétique. Au voisinage de celle-ci, l'évolution de l'intensité magnétique obtenue par Flux3d est quasi-linéaire tel qu'illustré à la figure 2.23.

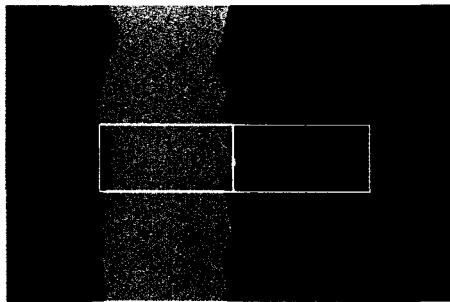


Figure 2.22 : Domaine et plaque modélisé par Flux3d

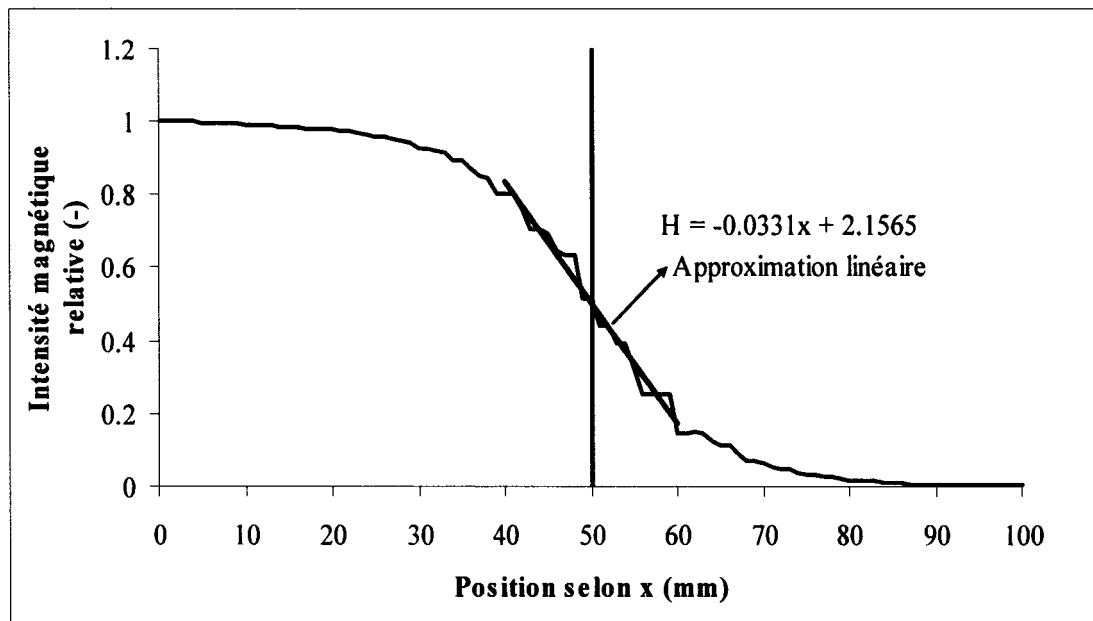


Figure 2.23 : Décroissance à une interface magnétique tel que solutionnée par Flux3d

2.7.2 Solution du potentiel magnétique scalaire

L'équation du potentiel magnétique scalaire est résolue en régime permanent et l'équation d'énergie est résolue en régime transitoire. Cet aspect indique que les phénomènes de magnétisation sont considérés comme instantanés par rapport aux phénomènes d'échanges thermiques. Ceci implique que la solution magnétostatique doit être complètement convergée pour chacun des pas de temps lors de la résolution thermique. Puisque les conditions aux limites sur le potentiel magnétique sont transitoires, il est essentiel d'imposer un nombre d'itérations nécessaire afin d'atteindre une convergence suffisante pour chaque pas de temps lors de la résolution de l'équation 2.5.

La figure 2.24 présente la distribution verticale de l'intensité magnétique calculée selon le gradient du potentiel après quatre, sept et dix itérations. Il est montré que les itérations de calcul subséquentes à la septième itération ne modifient pas la solution de l'intensité magnétique. Ainsi, sept itérations par pas de calcul sont suffisantes pour que la solution du potentiel magnétique soit complètement convergée.

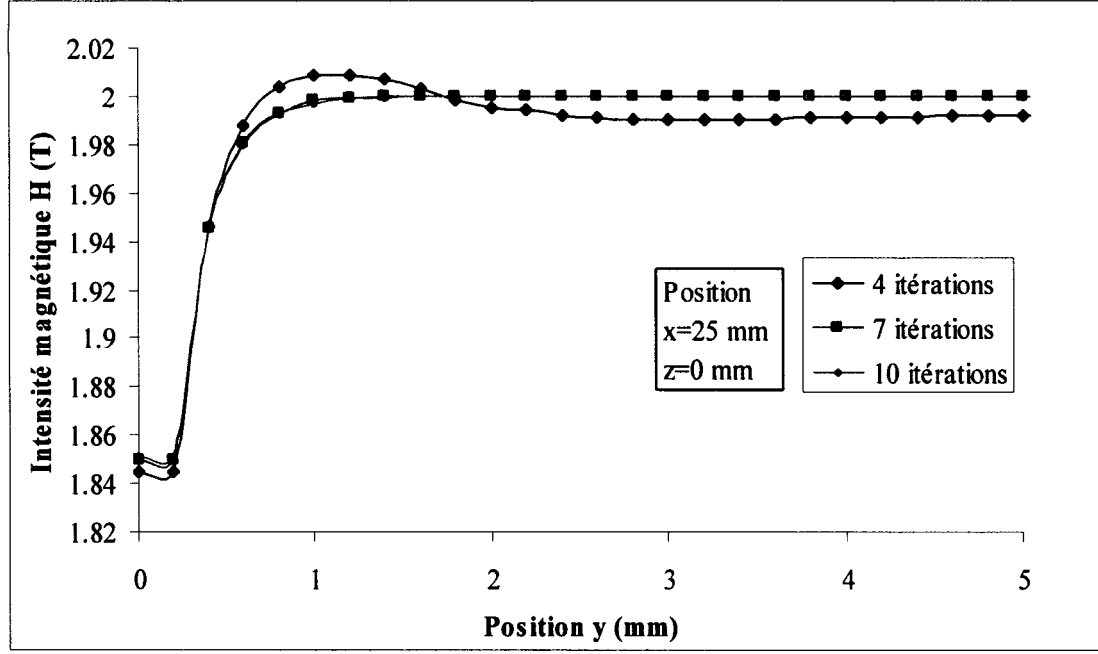


Figure 2.24: Nombre d'itérations nécessaires à la convergence de la solution magnétique

2.7.3 Évaluation de la fonction de Brillouin

La fonction de Brillouin est définie dans le calcul de la composante magnétique de l'entropie qui sert à l'évaluation de la capacité calorifique. Lorsque son argument tend vers zéro, celle-ci possède une discontinuité causée par la fonction \coth . Elle manifeste également un comportement asymptotique pour des arguments élevés. Ces deux limites peuvent être la source d'erreurs numériques lors de l'évaluation de la fonction (2.30) et de sa dérivée (2.31).

$$B_U(\eta) = \frac{1}{U} \{ (U + 1/2) \coth[(U + 1/2)\eta] - (1/2) \coth(\eta/2) \} \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial B_U(\eta)}{\partial \eta} = \frac{1}{U} \left\{ \left[\frac{1}{2 \sinh(\eta/2)} \right]^2 - \left[\frac{(U + 1/2)}{\sinh[(U + 1/2)\eta]} \right]^2 \right\} \quad (2.31)$$

En introduisant les approximations suivantes :

$$\coth(\xi) = \frac{1}{\xi} + \frac{1}{3}\xi \quad \xi \ll 1 \quad (2.32)$$

$$\coth(\xi) = 1 \quad \xi \gg 1 \quad (2.33)$$

Les expressions 2.30 et 2.31 deviennent :

$$B_U \Rightarrow \begin{cases} \frac{(U+1)}{3}\eta & \eta \ll 1 \\ 1 & \eta \gg 1 \end{cases} \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial B_U}{\partial \eta} \Rightarrow \begin{cases} \frac{(U+1)}{3} & \eta \ll 1 \\ 0 & \eta \gg 1 \end{cases} \quad (2.35)$$

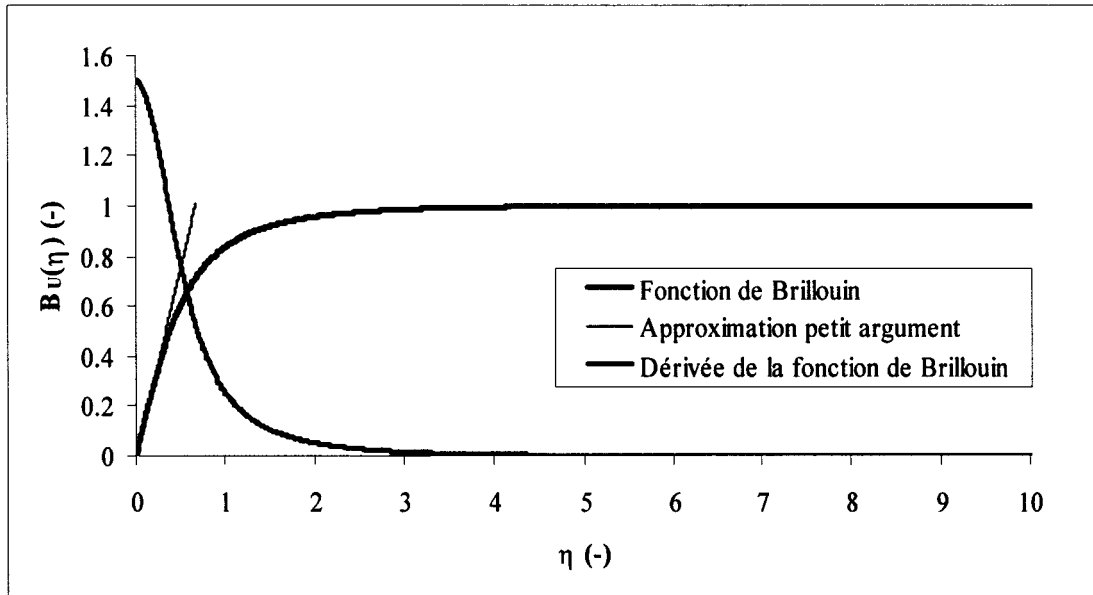


Figure 2.25 : Fonction de Brillouin et sa dérivée pour le gadolinium

La figure 2.25 montre que la fonction de Brillouin est linéaire pour de petits arguments et constante pour de grands arguments.

2.7.4 Approximations de l'équation de magnétisation

La solution d'un problème couplé composé de plusieurs sous routines de calcul entraîne la réalisation d'un grand nombre d'opérations surtout dans le cas d'un maillage dense. Il est donc important de tenter de réduire le nombre d'opérations effectuées pour diminuer le temps de calcul. Pour ce faire, certaines approximations simples dans le calcul de la capacité calorifique et le terme de source thermique sont incorporées. Ces mesures permettent de réduire le temps de calcul tout en conservant la précision désirée sur la solution numérique.

L'équation implicite de magnétisation 1.16 est transformée pour être solutionnée numériquement en fonction de la variable adimensionnelle η définie comme suit.

$$\eta = \frac{g\mu_B H_0}{kT} + \frac{g\mu_B \lambda M}{kT} = \frac{g\mu_B H_0}{kT} + \frac{g\mu_B \lambda}{kT} Ng\mu_B UB_U(\eta) = \frac{g\mu_B H_0}{kT} + \frac{3T_c B_U(\eta)}{T(U+1)} \quad (2.36)$$

La solution numérique est réalisée à l'aide d'un l'algorithme qui combine la convergence rapide de la méthode de Newton-Raphson avec la robustesse de la méthode de la bisection. L'utilisation de cet algorithme peut être évitée pour les limites de grand et de petit η par la simple inclusion de l'approximation de la fonction de Brillouin (2.34 et 2.35) dans la relation 2.36. Lorsque l'énergie thermique est beaucoup plus grande que l'énergie magnétique et que le gadolinium est paramagnétique, la magnétisation est réduite et η est approximé par l'expression 2.37. La condition en température permet d'éviter que l'approximation soit effective pour un champ magnétique restreint dans la région ferromagnétique ou le gadolinium est facilement magnétisable. Lorsque l'énergie magnétique est beaucoup plus grande que l'énergie thermique, la magnétisation est saturée et η est approximé par l'expression 2.38. Entre les deux limites, c'est l'algorithme mentionné ci haut qui permet de déterminer η .

$$\eta = \frac{g\mu_B H_0}{k(T - T_c)} \quad \eta \ll 1 \text{ et } T > T_c \quad (2.37)$$

$$\eta = \frac{g\mu_B H_0}{kT} + \frac{3T_c}{T(U+1)} \quad \eta \gg 1 \quad (2.38)$$

2.7.5 Évaluation de l'entropie du réseau

L'expression 1.27 de l'entropie de réseau contient une fonction intégrale dont l'évaluation est simplifiée par une approximation polynomiale définie à la relation suivante.

$$S_R \propto \int_0^{T_D/T} \frac{v^3}{e^v - 1} dv = \sum_n a_n \left(\frac{T_D}{T} \right)^{n-1} \quad (2.39)$$

Les coefficients du polynôme de degré cinq présentés au tableau 2.4 permettent d'évaluer l'intégrale avec précision comme le démontre la figure 2.26.

Tableau 2.4 Coefficients pour l'approximation polynomiale

a ₁	9.92669873520665E-04
a ₂	6.4479285334882E-03
a ₃	1.66416258395381E-02
a ₄	0.311708522462716
a ₅	0.110440386934975
a ₆	1.23563986908266E-02

L'intégration numérique, représentée en bleue sur la figure, est réalisée à l'aide de la méthode de Romberg. Bien que cette méthode soit efficace pour l'évaluation de l'intégrale, l'approximation polynomiale génère des résultats équivalents avec un nombre moindre d'opérations permettant de réduire le temps de calcul.

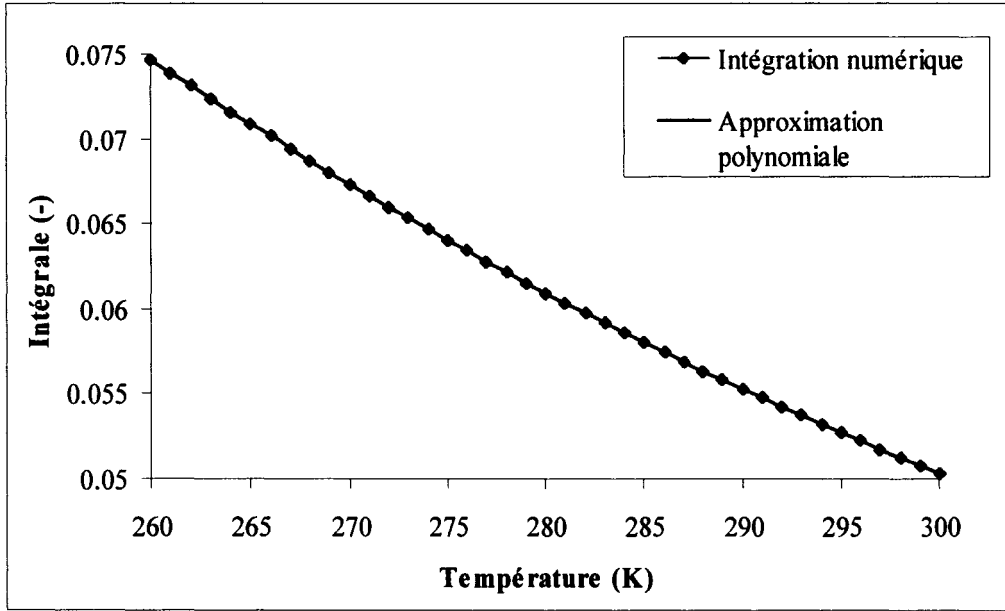


Figure 2.26 : Validation de l'approximation polynomiale de l'intégrale de réseau

2.7.6 Évaluation du terme de source thermique

Lors de la résolution numérique, le terme de source 2.9 doit être linéarisé de telle sorte que :

$$S_T = S_u + S_p T \quad (2.40)$$

Où S_p est la contribution du terme de source à la diagonale de la matrice. Cette composante doit être inférieure ou égale à zéros pour assurer la stabilité numérique lors de la résolution. La solution triviale étant $S_p=0$. Dans ce cas, le terme de source devient une constante ($S_T=S_u$) au pas de temps considéré puisqu'il ne dépendra pas de la température au pas de temps courant. Il est à noter que la température apparaissant dans l'expression 2.9 est celle du pas de temps précédent. La méthode de Romberg combinée à celle du point milieu a été utilisée pour l'évaluation numérique de l'intégrale présente dans l'équation 2.9. Cette procédure permet de surmonter les instabilités dues à la discontinuité de l'intégrant au voisinage du point de Curie. Toutefois, l'utilisation de l'algorithme de Romberg peut être évitée pour deux cas. Si la variation de l'intensité

magnétique à un nœud de calcul est plus petite ou égale à 0.01 tesla, la variation de température équivalente est considérée comme négligeable. Dans le cas contraire, lorsque la variation est grande lors des premières itérations pour chaque pas de temps, la solution magnétostatique n'est qu'intermédiaire et il n'est pas nécessaire de calculer le terme de source avec précision. Le terme de source est alors approximée par la relation 2.41 qui découle directement de l'équation 1.7 pour laquelle la variation de la capacité calorifique avec l'intensité magnétique est négligée.

$$\Delta T_{ad} = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \Delta H \leq 0.01 T \\ T \frac{\Delta S}{C_p(H, T)} \cong T \frac{(S_M(H_{t-\Delta t}, T) - S_M(H_t, T))}{C_p(H_t, T)} & \Delta H \geq 2.5 T \end{array} \right\} \quad (2.41)$$

La variation de l'entropie à température constante correspond à la variation de l'entropie magnétique évaluée avec les intensités magnétiques aux pas de temps précédent et actuel. L'approximation 2.41 permet de réduire la fréquence d'utilisation de l'algorithme de Romberg et ainsi diminuer le temps de calcul.

Chapitre 3

Résultats

3.1 Paramètres d'analyses

Une analyse paramétrique a été réalisée afin d'étudier l'impact de la distribution non uniforme du champ magnétique au sein du matériau sur l'EMC. À cet effet, deux variables ont été variées à savoir : la température initiale de la plaque et l'intensité de l'induction magnétique. Trois températures initiales sont associées à trois inductions magnétiques définissant neuf simulations telles que présentées au tableau 3.1. Les températures initiales sont respectivement fixées au point de Curie T_c du gadolinium et à ses voisinages inférieur et supérieur soient à $T_c \pm 10$ K. De plus, les valeurs de 1, 1.5 et 2 T ont été adoptée pour l'induction magnétique externe B . Ces valeurs correspondent, tel que mentionné à la section 2.1, à l'induction magnétique maximale pouvant être générée par une configuration d'aimant permanent. Les valeurs des paramètres définissant les simulations réalisées sont présentées au tableau suivant :

Tableau 3.1 Définition des paramètres de simulation

Température initiale (K)	Induction externe (T)	Identification des simulations
281	2	1
	1.5	2
	1	3
291	2	4
	1.5	5
	1	6
271	2	7
	1.5	8
	1	9

Pour chacun des cas identifiés au tableau 3.1, une simulation complète et une simulation de référence sont réalisées. Pour le cas de référence, l'intensité magnétique à l'intérieure de la plaque est imposée comme constante et égale à la valeur de l'intensité externe appliquée. Ainsi, seule l'équation d'énergie 2.8 est solutionnée. La solution du cas de référence correspond à l'évaluation théorique de l'EMC tel qu'il est généralement

présenté dans la littérature scientifique; c'est-à-dire en négligeant la réduction de l'intensité magnétique dans le matériau ferromagnétique. Le cas complet correspond à la solution couplée de l'équation du potentiel magnétique scalaire 2.5 et de l'équation d'énergie 2.8 telle que décrite jusqu'à présent. La comparaison des résultats des cas complet et de référence permet de mettre en évidence les impacts de la réduction de l'intensité magnétique sur l'EMC.

La résolution numérique est effectuée uniquement pour la magnétisation de la plaque. Puisque les conditions aux frontières en température sont adiabatiques, il n'est pas nécessaire de simuler la démagnétisation étant donné que le cycle est réversible ce dernier processus fera évoluer le système vers les conditions initiales. En effet, la figure 2.19 montre que le matériau, une fois démagnétisé, tend vers sa température initiale. Le temps requis à la plaque de 100 mm de longueur pour complètement entrer dans le pôle magnétique est de 5 s étant donné que la fréquence est fixée à 0.1 Hz. L'incrément de temps associé à la solution transitoire est de 0.2 secondes, c'est-à-dire que le déplacement de la plaque dans le pôle magnétique est de 4 mm par incrément de temps.

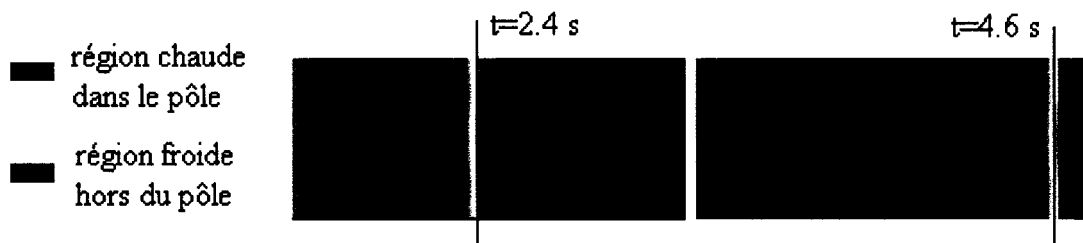


Figure 3.1 : Illustration du mouvement de la plaque lors de la magnétisation

La figure 3.1 illustre l'évolution de la température de la plaque lorsque celle-ci est magnétisée. La variation du champ magnétique induite par le mouvement de la plaque dans le pôle génère l'EMC qui augmente la température dans le volume magnétisé. Ainsi, l'interface magnétique se situe à 48 mm et 92 mm par rapport à la limite gauche de la plaque pour des temps respectifs de 2.4 et 4.6 secondes. Les résultats seront présentés sous forme de distributions du champ magnétique et du champ thermique au sein du matériau. L'évolution de l'EMC ainsi que la répartition de la densité d'énergie seront

également présentés. La récapitulation des variables servant à l'analyse des résultats est présentée au tableau 3.3.

Tableau 3.3 Variables qui servent à l'analyse des résultats

Variables	Définitions	Unités
H	Intensité magnétique à l'intérieur de la plaque tel que $H = -\vec{\nabla}\varphi $	T
T	Température	K
$\Delta T_{ad}(H,T)$	Variation de température due à l'EMC (1.8)	K
$C_p(H,T)$	Capacité calorifique du Gd	J/kg-K
$\mu_r(H,T)$	Perméabilité relative du Gd	-

3.2 Réduction de l'intensité magnétique

3.2.1 Effet de bord

La perméabilité magnétique relative du gadolinium est toujours supérieure à l'unité lorsque celle-ci est soumise à une induction magnétique externe. Puisque la perméabilité magnétique relative d'un milieu non magnétique équivaut à 1, cette propriété magnétique est sujette à d'importantes variations aux voisinages des frontières du domaine de calcul. Conséquemment, une variation du potentiel magnétique est induite par ce comportement. Il en découle, une réduction de l'intensité magnétique aux frontières de la plaque. Effectivement, l'orientation de la magnétisation et de l'intensité magnétique près des frontières est opposée induisant une baisse de cette dernière telle que rapportée dans la littérature [8]. Ce phénomène est généralement nommé effet de bord.

Dans le cas de la plaque de gadolinium, la réduction de l'intensité magnétique s'étale sur une profondeur allant jusqu'à 1 mm à partir des frontières selon la direction Oy . Il importe de rappeler que le champ magnétique externe est orienté selon l'axe Oy . Au-delà de ces limites, l'intensité magnétique tend vers la valeur de l'intensité externe appliquée.

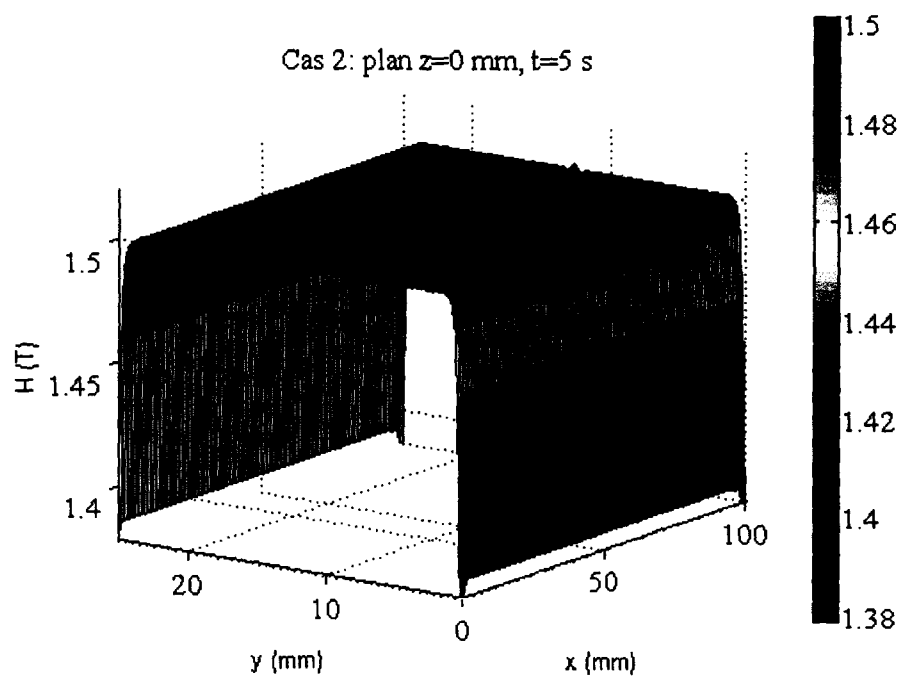


Figure 3.2 : Distribution de l'Intensité magnétique pour le cas 2

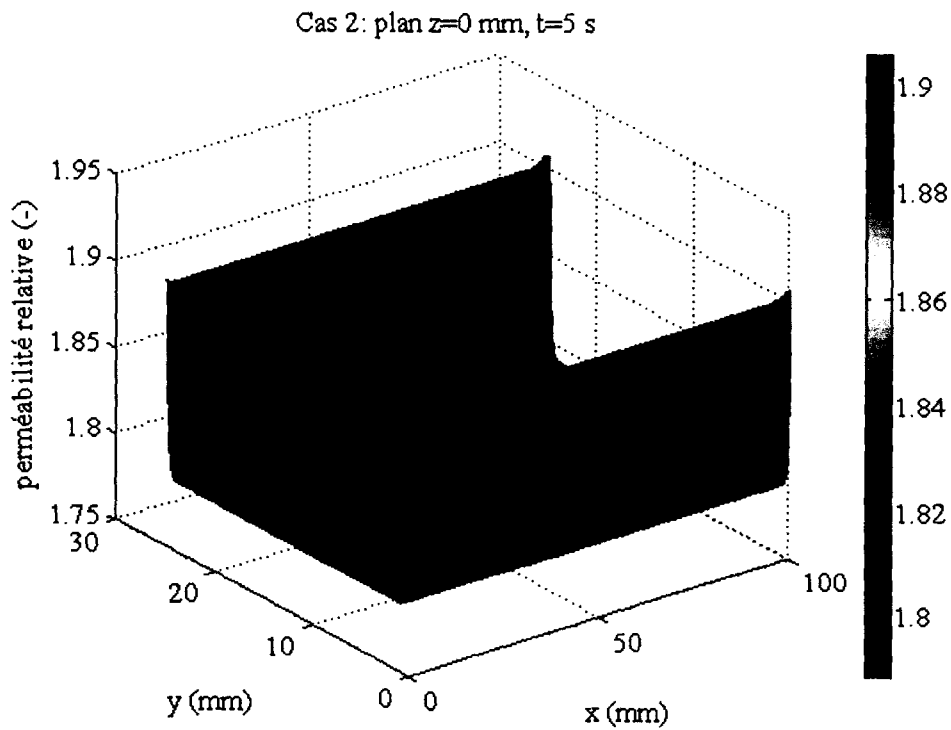


Figure 3.3 : Distribution de la perméabilité magnétique relative pour le cas 2

Les figures 3.2 et 3.3 illustrent la relation entre l'intensité magnétique et la perméabilité magnétique relative pour le cas 2 lorsque la plaque est totalement sous l'effet du champ magnétique. Les surfaces tridimensionnelles présentent les fonctions $\mu_r(x,y)$ et $H(x,y)$ pour le plan $z=0$ mm, c'est-à-dire sur la face située à l'origine dans le plan xy . Les figures permettent de constater que l'intensité du champ magnétique diminue lorsque la perméabilité magnétique augmente et vis versa. Aussi, les effets de bords sont maximums très près des faces de la plaque; soit à $z=0$ et $z=2$ mm. Les résultats obtenus pour le cas 2 révèlent que l'intensité du champ magnétique ne dépasse pas un maximum de 1.378 T. Ainsi, le taux maximal de réduction de l'intensité magnétique correspond à 8.13 % tel que définie par la relation 3.1.

$$\frac{\Delta H}{B} = 100 \frac{(B - H_{\max})}{B} \quad (3.1)$$

Le tableau 3.4 présente les taux maximaux de réduction de l'intensité magnétique ainsi que les intensités magnétiques moyennes pour tous les cas simulés.

Tableau 3.4 Taux maximaux de la réduction de l'intensité magnétique et intensités magnétiques moyennes dans toute la plaque à $t=5$ s

Cas	Température initiale (K)	Champ magnétique externe (T)	$\Delta H/B$ (%)	$\bar{H}_{t=5s}$ (T)
1	281	2	7.95	1.999
2	281	1.5	8.13	1.499
3	281	1	8.60	0.999
4	291	2	7.65	1.999
5	291	1.5	7.80	1.499
6	291	1	8.00	0.999
7	271	2	8.20	1.999
8	271	1.5	8.53	1.499
9	271	1	9.30	0.999

Il est constaté que les effets de bords ont un impact plus prononcé lorsque l'induction externe appliquée est réduite. Effectivement, les résultats obtenus concordent avec ceux de Dai [11]. Ce dernier montre que l'écart entre les valeurs théoriques et expérimentales de l'EMC est maximal à bas champ magnétique. Lorsque les températures sont inférieures au point de Curie (cas 7, 8 et 9), la réduction de l'intensité magnétique est plus

importante parce que la perméabilité relative du gadolinium est plus élevée. Somme toute, les taux de réductions maximales de l'intensité magnétique se situent entre 7.7% et 9.3%.

Les phénomènes de réduction de l'intensité magnétique sont concentrés aux bords de la plaque. À cause de l'étendue restreinte des effets de bords, l'intensité magnétique moyenne dans la plaque est pratiquement égale à l'intensité externe appliquée comme mis en évidence par les valeurs de $\overline{H}_{t=5s}$ présentées au tableau 3.4. D'un point de vue global, l'intensité magnétique dans la plaque de gadolinium est égale à l'intensité dans un milieu non magnétique lorsque le matériau est totalement sous l'effet du champ magnétique. Il est important de mentionner que le constat précédent s'applique uniquement pour une plaque mince. En effet, la réduction de l'intensité magnétique par les effets de bord peut être tout autre pour une géométrie différente telle qu'un cylindre de gadolinium.

3.2.2 Effet transitoire

Tel que mentionné à la section 2.7.1, l'intensité magnétique subit une décroissance linéaire selon la direction x sur la partie incluant l'interface magnétique et son voisinage immédiat. Puisque la position de l'interface magnétique dans la plaque de gadolinium se déplace avec le temps, la réduction de l'intensité magnétique à l'interface n'est que momentanée. Ainsi, la réduction de l'intensité magnétique est un phénomène transitoire occasionné, d'une part, par le déplacement de l'interface magnétique et, d'autre part, par les effets de bord.

La figure 3.4 présente l'intensité magnétique sur la longueur de la plaque (selon la direction x) pour deux positions définies selon la hauteur (selon l'axe y) et l'épaisseur (selon l'axe z) de la plaque. À 2.4 secondes, l'intensité magnétique pour la simulation de référence décroît de façon brusque à 48 mm, correspondant à la position de l'interface magnétique. La décroissance linéaire de l'intensité magnétique pour les cas complets s'effectue entre 44 et 51 mm. L'intensité magnétique est ainsi moins élevée pour les cas

complets par rapport aux cas de références entre 44 et 48 mm et elle est plus élevée entre 48 et 51 mm correspondant au phénomène de diffusion magnétique à l'interface. De plus, combiné à l'effet transitoire, l'effet de bord induit une diminution de l'intensité magnétique légèrement plus importante. En effet, pour un segment en x près des bords de la plaque ($y=0.2$ mm et $z=0$ mm), l'intensité magnétique est moins élevée que pour un segment central ($y=12$ mm et $z=0.5$ mm).

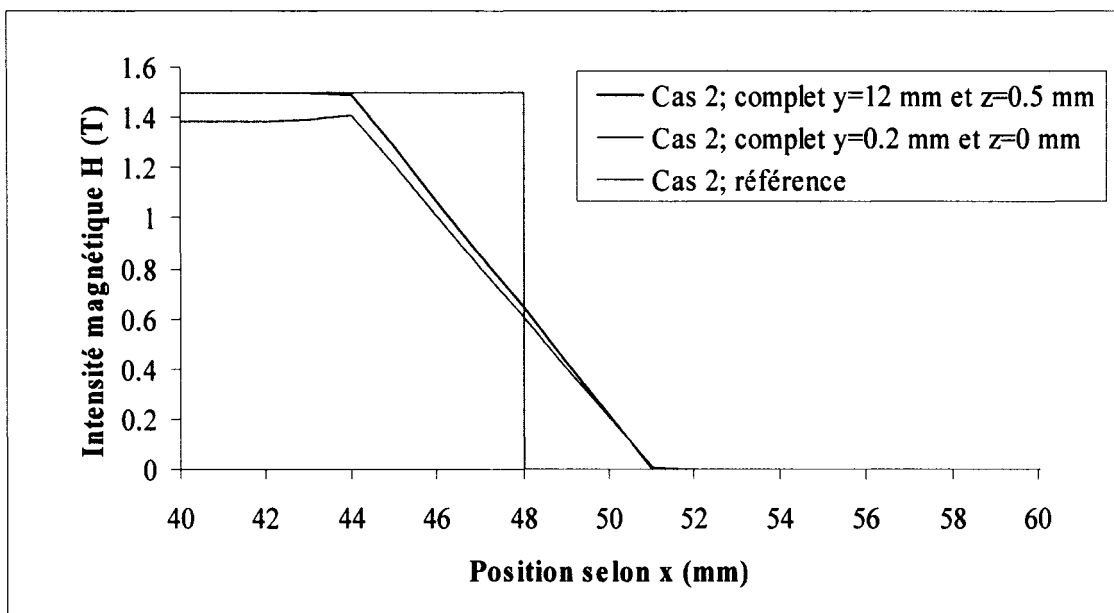


Figure 3.4 : Réduction de l'intensité magnétique à l'interface magnétique; cas 2 à $t=2.4$ s

3.3 Impacts sur l'effet magnétocalorique

3.3.1 Effets transitoire à l'interface magnétique

Les profils présentés aux figures 3.5, 3.6 et 3.7 sont définis selon un segment central dans la direction x tel qu'introduit à la section précédente en ce qui trait à la figure 3.4. Ceux-ci présentent respectivement les profils de l'EMC, de la température et de l'intensité magnétique pour le cas 2 à 2.4 secondes. Tout d'abord, les profils de la figure 3.5 indiquent que la réduction du champ au niveau de l'interface magnétique altère la distribution de l'EMC. Pour le cas de référence, la variation de température est localisée sur le volume de la plaque qui subit une variation de l'induction; c'est-à-dire la partie du

matériau qui passe de $B = 0$ à $B = B$. Dans le cas complet, l'énergie magnétique se répartie sur un volume plus important de la plaque, d'où une réduction de la densité d'énergie.

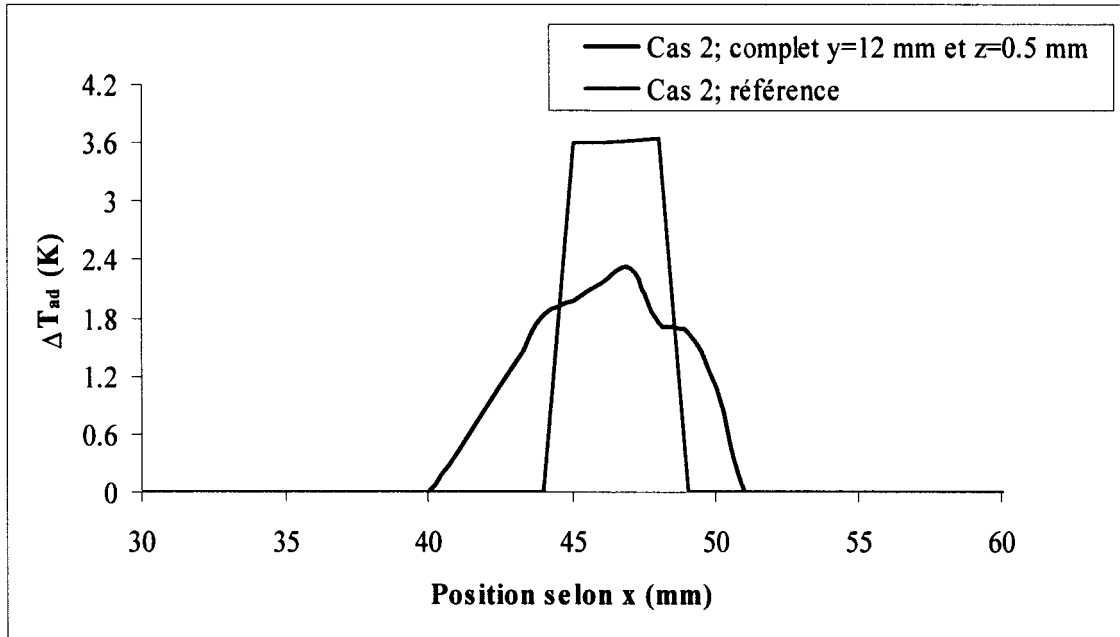


Figure 3.5 : Distribution selon x de l'EMC pour le cas 2 à $t=2.4$ s

Ainsi, il est logique d'observer une température à l'interface moins importante comparativement au cas de référence. Il est également évident, d'obtenir un effet inverse loin de l'interface comprise entre les deux lignes en pointillés telle qu'illustrée par la figure 3.6.

La distribution de l'EMC pour le cas complet, tel que présentée à la figure 3.5, est une conséquence directe de la réduction de l'intensité magnétique à l'interface. Le transfert de l'énergie magnétique au matériau situé dans la partie non soumise au champ magnétique au voisinage de l'interface est la cause cette réduction. La figure 3.7 montre que la variation ΔH est moins importante au niveau de l'interface. Cependant, un EMC se manifeste avant même que le matériau soit soumis à l'induction. En outre, l'EMC persiste dans les parties magnétisées du matériau adjacentes à l'interface.

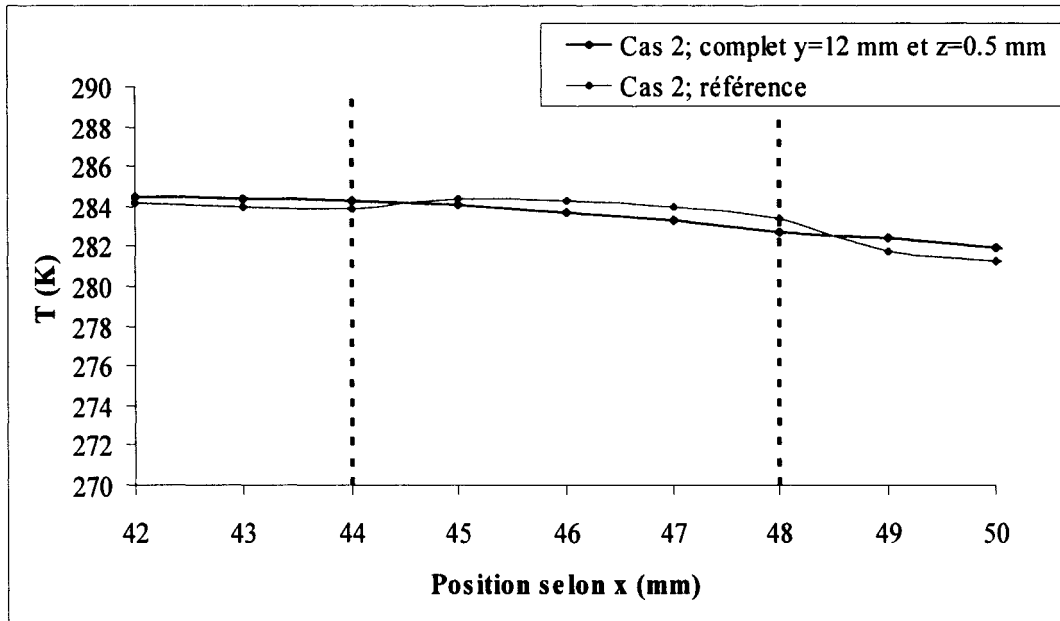


Figure 3.6 : Température à l'interface pour le cas 2 à $t=2.4$ s

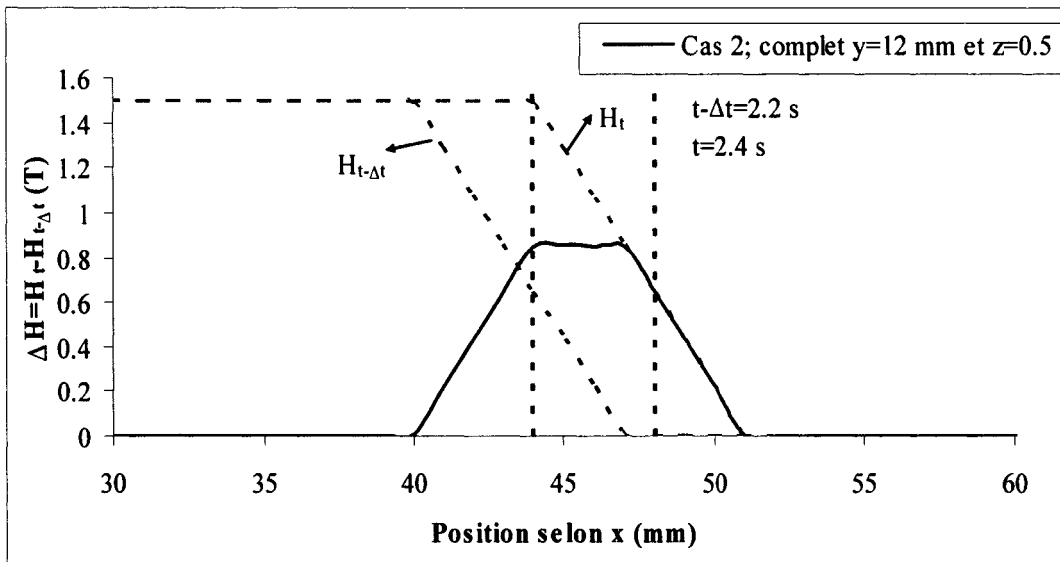


Figure 3.7 : Variation de l'intensité magnétique pour le cas 2 entre 2.2 et 2.4 s

3.3.1.1 Densité d'énergie à l'interface

Afin d'étudier la réduction de l'EMC à l'interface magnétique en fonction des paramètres gouvernants, la notion de densité volumique est introduite. Pour des raisons de commodité, la densité d'énergie est normalisée par rapport à une valeur de référence.

Cette dernière est la quantité d'énergie accumulée par le matériau lorsque celui-ci est complètement magnétisé. La densité volumique d'énergie normalisée est définie par la relation 3.2 telle que :

$$\bar{\varepsilon}_t = \frac{\sum_{i=1}^n C_{p(i)} \Delta T_{ad(i)}}{nC_{p(f)} T_f} \quad (3.2)$$

avec

$$C_{p(f)} = C_p(B, T_f) \quad \text{et} \quad T_f = T_0 + \Delta T_{ad}(B, T_0)$$

La capacité calorifique est évaluée à l'aide du champ externe appliqué B et de la température finale qui correspond à la somme de la température initiale et de la variation maximum de température causée par l'EMC. Le numérateur constitue l'énergie injectée à l'interface pour chaque pas de temps. La variable n représente le nombre de volumes infinitésimaux pour lesquels l'EMC est non nul. L'équation 3.2 permet de quantifier la densité d'énergie absorbée par le matériau en fonction du temps et de la position de la plaque dans le pôle magnétique. La densité d'énergie a été déterminée pour tous les instants simulés, et ce, pour les cas complet et de référence.

La différence entre la densité d'énergie normalisée dans le cas complet et le cas de référence permet de mettre en évidence l'écart de la qualité de l'énergie magnétique transmise à la plaque. Cette différence est normalisée par rapport au champ externe appliqué pour permettre la comparaison entre les divers cas simulés.

$$\Delta \bar{\varepsilon}_t = \frac{\bar{\varepsilon}_{t(\text{référence})} - \bar{\varepsilon}_{t(\text{complet})}}{B} (T^{-1}) \quad (3.3)$$

Il importe de noter que les valeurs de $\Delta \bar{\varepsilon}_t$ sont strictement positives puisque la densité d'énergie à l'interface pour le cas complet est toujours inférieure à celle du cas de référence. Les figures 3.8, 3.9 et 3.10 représentent l'évolution temporelle de la différence de densité d'énergie pour les cas à 271 K, 281 K et 291 K respectivement.

Il est constaté que lorsque la température initiale est sous le point de Curie, les différences entre les densités d'énergie à l'interface sont près les unes des autres comme l'illustre les courbes de la figure 3.8. Sous le point de Curie, le comportement ferromagnétique du gadolinium favorise la variation de sa magnétisation avec l'intensité magnétique. Ainsi, la capacité calorifique et l'augmentation de température due à l'EMC subissent des variations plus importantes près du point de Curie comme décrit respectivement par les relations 1.31 et 1.8.

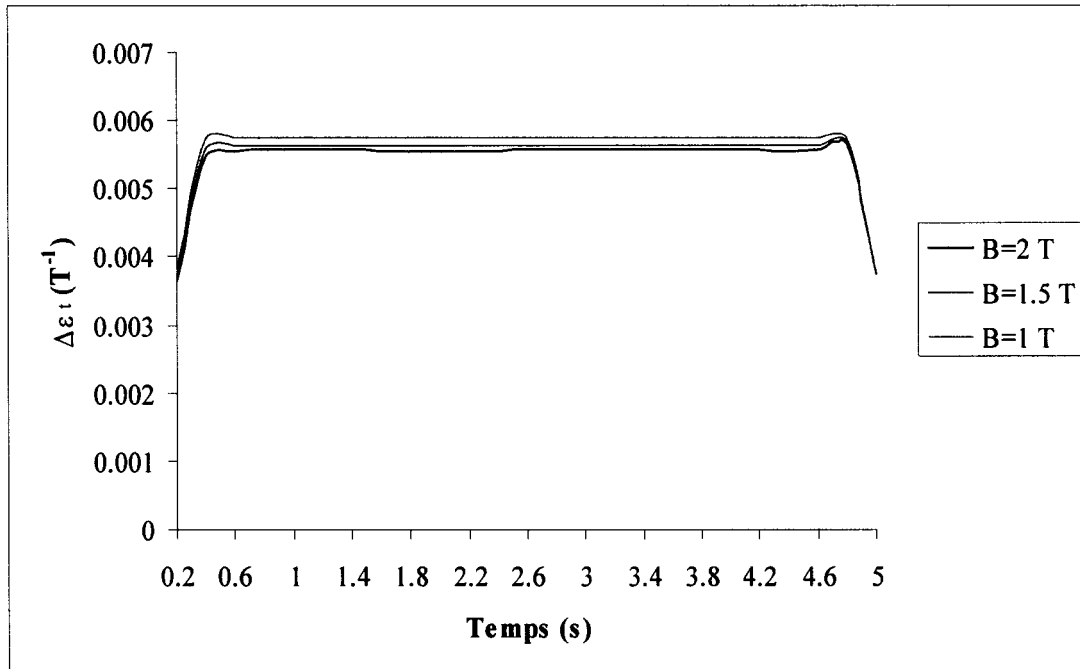


Figure 3.8 : Différences de densités d'énergie normalisée 3.3 en fonction du temps pour une température initiale de 271 K; cas 7, 8 et 9

Lorsque la température est au dessus du point de Curie, un champ magnétique situé entre 1 et 2 teslas génère une magnétisation moins élevée diminuant l'augmentation de température de la plaque de gadolinium. Ainsi, les valeurs de la figure 3.10 sont réduites d'un facteur deux par rapport aux valeurs des figures 3.8 et 3.9.

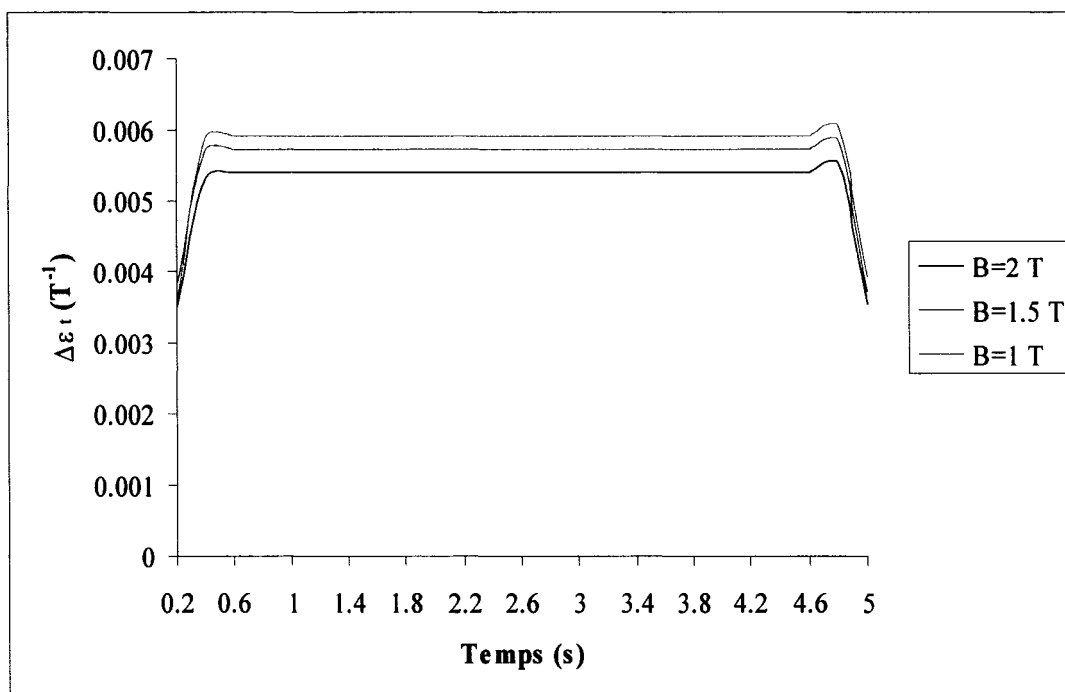


Figure 3.9 : Différences de densités d'énergie normalisée 3.3 en fonction du temps pour une température initiale de 281 K; cas 1, 2 et 3

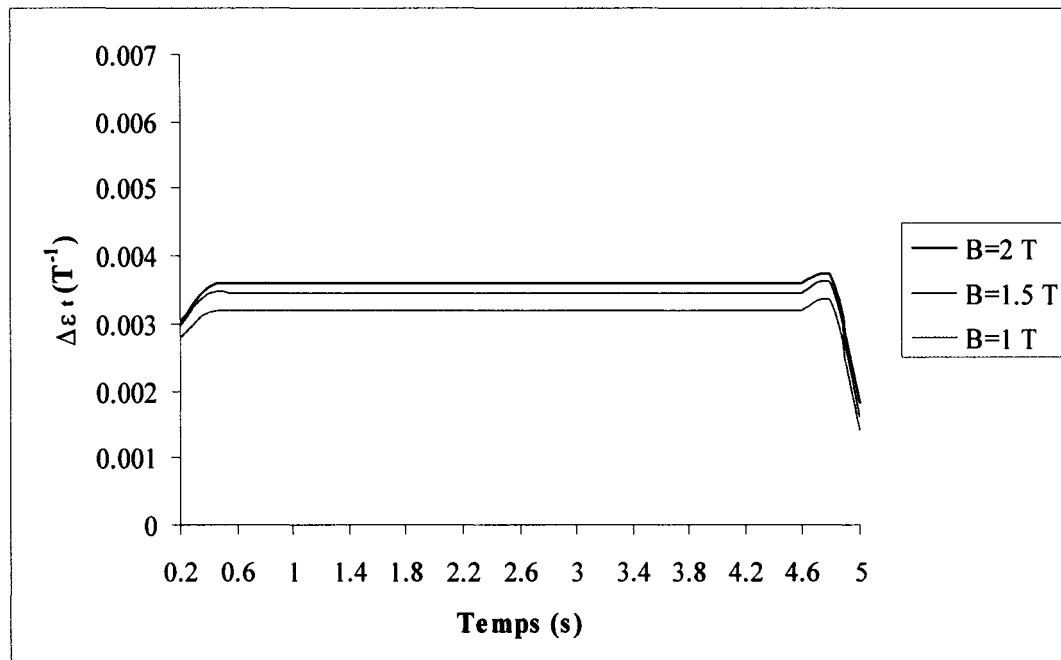


Figure 3.10 : Différences de densités d'énergie normalisée 3.3 en fonction du temps pour une température initiale de 291 K; cas 4, 5 et 6

À une température initiale de 271 K, les différences de densité d'énergie entre les cas complets et les cas de références sont minimales. Plus la température est sous le point de Curie, et plus le champ magnétique requis pour saturer la magnétisation d'un matériau ferromagnétique est bas. C'est pour cette raison que les courbes de la figure 3.8 sont moins affectées par l'intensité magnétique que les courbes des figures 3.9 et 3.10.

Sous le point de Curie et près de celui-ci, la différence de densité d'énergie entre les cas complets et les cas de références est toujours maximum lorsque le champ appliqué est minimum. En effet, tel qu'illustré par les figures 3.8 et 3.9, les valeurs de $\Delta \bar{\epsilon}_l$ sont maximales lorsqu'un champ de 1 T est traité. Au dessus de la température de Curie, la tendance s'inverse tel qu'illustré à la figure 3.10. Ce constat est directement relié à l'évolution de la capacité calorifique avec le champ magnétique. Sous le point de Curie, la capacité calorifique diminue lorsque le champ magnétique augmente, indiquant une saturation facile de la magnétisation comme mentionnée plus haut. L'écart entre les densités d'énergie pour les cas complet et de référence est donc réduit à champ magnétique plus élevé à cause de la diminution de l'impact du champ sur l'EMC. Au dessus du point de Curie, la tendance s'inverse; la capacité calorifique augmente lorsque le champ magnétique augmente. Conséquemment, les valeurs de $\Delta \bar{\epsilon}_l$ sont minimales lorsqu'un champ de 1 T est traité et que la température est au dessus de point de Curie tel qu'illustré à la figure 3.10.

3.3.1.2 Énergie à l'interface magnétique

Le calcul de l'énergie absorbée par la plaque à l'interface magnétique permet d'expliquer l'impact de la réduction du champ magnétique sur la température. En effet, la différence entre la température de la plaque lors de sa magnétisation et sa température initiale est proportionnelle à la réfrigération disponible dans un système de RM. La température moyenne et la différence des températures moyennes entre les cas complet et de référence sont définies de façon à ce que :

$$\Delta \bar{T}_t = \Delta \bar{T} = \frac{\bar{T}_{référence} - \bar{T}_{complet}}{B} \quad (3.4)$$

avec

$$\bar{T} = \frac{\sum_i^n T_i}{n} \quad (3.5)$$

L'énergie moyenne absorbée par la plaque à l'interface est définie comme :

$$\bar{E}_t = \frac{\sum_{0..t} \sum_{i=1}^n C_{p(i)} \Delta T_{ad(i)}}{NC_{p(f)} T_f} \quad (3.6)$$

L'énergie de normalisation est similaire à celle de l'équation 3.2 à l'exception de la variable N qui correspond au nombre total de volumes finis inclus dans la plaque. De plus, l'équation 3.6 est cumulative, c'est-à-dire que l'énergie de la plaque aux instants précédents est incluse à l'énergie absorbée au temps t considéré. L'énergie moyenne permet de définir la différence d'énergies moyennes entre les cas complet et de référence tel que :

$$\Delta \bar{E}_t = 100 \frac{\bar{E}_{t(référence)} - \bar{E}_{t(complet)}}{\bar{E}_{t(référence)}} (\%) \quad (3.7)$$

Entre les instants initiaux et finaux, les courbes des figures 3.8, 3.9 et 3.10 sont des droites de pentes nulles. Ainsi, d'un pas de temps à un autre, la densité d'énergie de la plaque est constante. Puisque l'EMC ne varie pas avec le temps, l'échange de chaleur par conduction à l'interface est négligeable. Ce phénomène est aussi corroboré par la température moyenne de la plaque qui pénètre dans le champ magnétique. Pour toutes les simulations, celle-ci ne varie pas avec le temps. Les valeurs de $\Delta \bar{T}_t$, présentées au tableau 3.5, sont les mêmes pour chacun des instants. Le tableau 3.5 présente aussi la moyenne temporelle des valeurs de $\Delta \bar{E}_t$ pour chacune des simulations.

Tableau 3.5 Différences de températures moyennes $\Delta\bar{T}$ et d'énergies moyennes $\Delta\bar{E}$

Cas	Température initiale (K)	Champ magnétique externe (T)	$\Delta\bar{T}$ (K/T)	$\Delta\bar{E}$ (%)
1	281	2	0.28	1.67
2	281	1.5	0.32	2.20
3	281	1	0.26	2.84
4	291	2	0.39	5.68
5	291	1.5	0.42	6.50
6	291	1	0.44	6.60
7	271	2	0.51	8.91
8	271	1.5	0.54	8.13
9	271	1	0.59	7.27

Comme les différences de température moyenne, les différences d'énergie moyennes sont maximums pour une température initiale de 271 K et minimums pour une température initiale de 281 K. Toutefois, l'écart réduit entre les valeurs ne permet pas de dégager une tendance simple reliée à un variable physique. Entre les cas de références et les cas complets, il y a toujours réduction de la capacité calorifique et de l'EMC. Les réductions sont équivalentes pour chacun des cas simulés. C'est plutôt l'agencement de la capacité calorifique et de l'EMC relatifs aux volumes finis qui favorise une réduction accrue de l'énergie pour les températures initiales de 291 et 271 K.

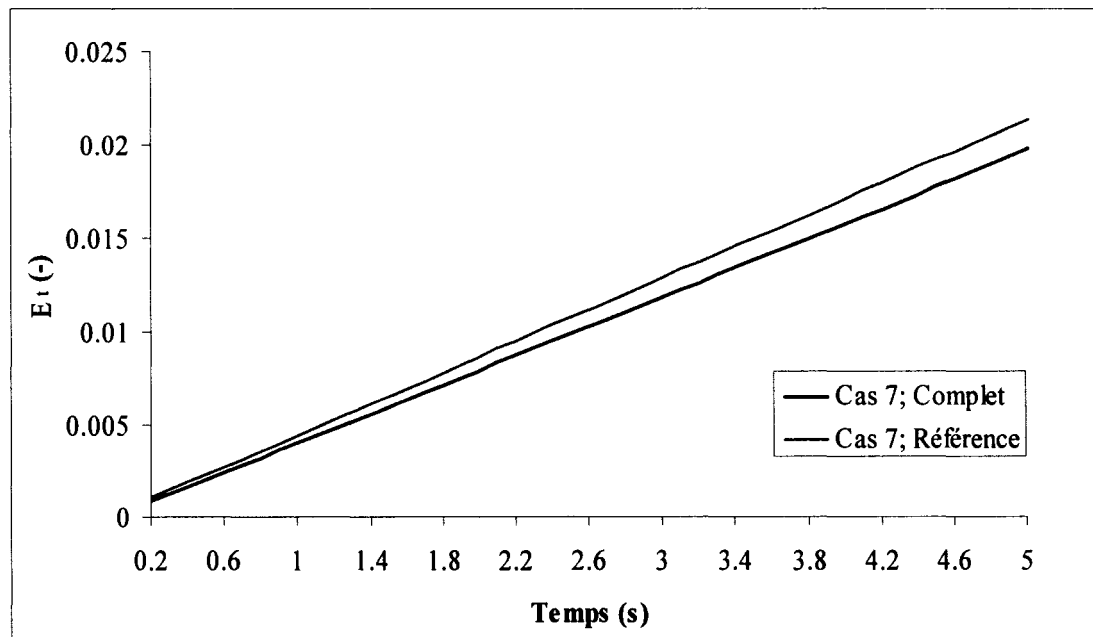


Figure 3.11 : Énergies \bar{E}_t pour le cas 7 en fonction du temps

Bien que la densité d'énergie à l'interface soit réduite pour les cas complets par rapport aux cas de références, l'énergie totale absorbée \bar{E}_t est comparable tel qu'illustré à la figure 3.11. Ainsi, la variation des densités d'énergie justifie l'augmentation des températures moyennes à l'interface, mais la quasi égalité des énergies totales explique que celle-ci n'excèdent pas 0.6 K/T. En somme, pour une plaque de gadolinium opérant à une température située entre 271 K et 291 K et sur laquelle un champ magnétique situé entre 2 T et 1 T est appliqué, la prise en considération de la réduction de l'intensité magnétique à l'interface y réduit l'énergie injectée de 2 à 9% et l'augmentation de température de 0.3 à 0.6 K/T.

3.3.2 Effets sur la température finale

Lorsque le cycle de magnétisation est complété, la plaque est entièrement dans le pôle magnétique et sa température moyenne à cet instant est une indication du potentiel de réfrigération. En effet, plus l'augmentation de la température moyenne est importante lors de la magnétisation, meilleure serait la diminution de la température du matériau lors de la démagnétisation. Ceci constitue un avantage certain pour la production de froid. L'EMC moyen est quantifié à l'aide de la différence entre la température moyenne pour tout le volume de la plaque et la température initiale de la plaque comme suit :

$$\frac{\Delta T_{EMC}}{B} = \frac{\bar{T}_{t=5s} - T_0}{B} \quad (3.8)$$

Le tableau 3.6 regroupe les résultats obtenus des EMC moyens ainsi que des différences d'énergie moyennes. La comparaison entre l'EMC obtenu pour un cas complet et le cas de référence qui lui est associé révèle que la différence est relativement faible. Effectivement, les écarts entre l'EMC moyen pour l'ensemble des cas sont en général de l'ordre de 0.1 K/T. Il est clairement démontré que pour la géométrie considérée, les effets de bords et les effets transitoires relatifs à la réduction de l'intensité magnétique ont un impact négligeable sur l'EMC moyen du gadolinium.

Tableau 3.6 EMC moyen et différences d'énergies moyennes à $t=5$ secondes

Cas simulés	Température initiale (K)	Champ magnétique externe (T)	Complet $\Delta T_{EMC}/B$ (K/T)	Référence $\Delta T_{EMC}/B$ (K/T)	$\Delta \bar{E}_{t=5s}$ (%)
1	281	2	2.09	1.90	0.37
2	281	1.5	2.28	2.08	0.05
3	281	1	2.62	2.28	3.98
4	291	2	1.37	1.31	1.18
5	291	1.5	1.01	0.97	1.67
6	291	1	0.62	0.61	2.32
7	271	2	2.05	2.07	6.85
8	271	1.5	1.61	1.62	5.87
9	271	1	1.14	1.14	4.77

Ces résultats confirment ceux déjà obtenus en ce qui concerne la diminution du champ magnétique au sein du matériau (Voir Tableau 3.4). De plus, les faibles variations de l'énergie transmise à l'interface magnétique dues aux effets transitoires sont insuffisantes pour générer un impact significatif sur la température moyenne.

Les gradients de température présents dans la plaque peuvent affecter l'efficacité de l'échange de chaleur avec le fluide régénérateur. Ceux-ci sont étudiés à l'aide de l'écart maximum de température par rapport à la température moyenne finale défini comme :

$$\Delta T_{gradients} = 100 \frac{|\max[T_{t=5s}(x, y, z)] - \bar{T}_{t=5s}|}{\bar{T}_{t=5s}} (\%) \quad (3.9)$$

Tableau 3.7 Écart maximum de température $\Delta T_{gradients}$

Cas simulés	Température initiale (K)	Champ magnétique externe (T)	Complet $\Delta T_{gradients}$ (%)	Référence $\Delta T_{gradients}$ (%)
1	281	2	0.093	0.131
2	281	1.5	0.091	0.111
3	281	1	0.056	0.086
4	291	2	0.049	0.088
5	291	1.5	0.035	0.066
6	291	1	0.022	0.042
7	271	2	0.173	0.173
8	271	1.5	0.125	0.134
9	271	1	0.078	0.094

Le tableau 3.7 présente les valeurs de $\Delta T_{\text{gradients}}$ pour les cas complet et de référence. La moyenne des valeurs de $\Delta T_{\text{gradients}}$ est de 0.091 %, ce qui indique qu'il n'existe pas de gradient de température significatif dans la plaque mince de gadolinium. Ceci corrobore les faibles réductions de l'intensité magnétique (tableau 3.4) et les variations négligeables de l'énergie moyenne absorbée par la plaque entre les cas complet et de référence (tableau 3.5). Somme toute, à la fin de la magnétisation, la température de la plaque peut être considérée comme uniforme et ayant subi une augmentation correspondant à l'EMC générée par le champ externe.

Conclusion

La juste évaluation de l'EMC est l'aspect central de la quantification exacte de l'efficacité d'un cycle de RM. En plus de dépendre du champ magnétique, la valeur de l'EMC est fonction de la température du matériau. Lorsque l'EMC d'un matériau ferromagnétique est quantifié théoriquement, le champ magnétique présent dans celui-ci est supposé égal au champ externe appliqué. La distribution du champ magnétique dépend plutôt de la forme du matériau ferromagnétique ainsi que de sa réponse en magnétisation modélisée par la perméabilité magnétique. Lorsque le matériau ferromagnétique se déplace entre la zone de champ nul et la zone de champ non nul, un échange de chaleur est possible entre la région chaude et la région froide du matériau modifiant la température au voisinage de l'interface magnétique. Le champ magnétique peut aussi entraîner une réduction de l'EMC à l'interface par sa diffusion dans le volume du matériau hors du champ. L'EMC peut ainsi posséder un caractère transitoire en plus d'une distribution spatiale non uniforme.

Dans le but de palier à l'impossibilité de la mesure de ces effets, une évaluation quantitative de leur impact sur l'EMC s'inscrit dans des efforts de modélisation numérique, lesquels sont relativement restreints dans le domaine de la RM. La solution thermomagnétique couplée des équations d'énergie et du potentiel magnétique scalaire a été effectuée en régime transitoire pour une plaque mince de gadolinium. L'EMC a été incorporé au bilan énergétique par le biais d'une densité d'énergie proportionnelle à la variation de température équivalente. Le cycle de magnétisation a été simulé par le déplacement des conditions aux limites avec le temps selon une fréquence de 0.1 Hz. Les températures initiales ont été fixées à 281 K, 271 K et 291 K; soit au point de Curie du gadolinium et à ± 10 K de celui-ci. Pour chacune des températures choisies, un champ externe de 2 T, 1.5 T et 1 T a été simulé. Les simulations définies sont réalisées selon un cas de référence et un cas complet. Dans le cadre du cas de référence, le champ magnétique dans la plaque est imposé comme uniforme et égal au champ magnétique externe, comme si l'EMC était calculée d'une façon théorique. Pour le cas complet, le champ magnétique dans la plaque est déduit de la solution de l'équation du potentiel

magnétique scalaire. La comparaison des résultats obtenus pour les cas de références et les cas complets permet de quantifier la réduction du champ magnétique ainsi que son impact sur l'EMC en fonction de la température initiale et du champ magnétique appliqué. La réduction du champ magnétique est concentrée sur les bords de la plaque ainsi qu'à l'interface séparant le volume magnétisé du volume non magnétisé de la plaque. La réduction maximum sur les bords de la plaque est incluse entre 7.7 et 9.3 % par rapport à la valeur du champ appliqué. Le champ magnétique à l'interface subit une décroissance linéaire qui est effective pendant un bref instant pendant la magnétisation. Ceci induit une réduction moyenne de 62% de la densité d'énergie injectée à la plaque pour chacun des volumes magnétisés. En effet, la diffusion du champ magnétique dans la plaque augmente le volume sur lequel est distribué l'EMC à chaque instant par rapport au cas de référence.

Toutefois, l'énergie injectée à la plaque est réduite d'une valeur moyenne d'uniquement 3% par rapport à l'énergie générée par l'EMC lorsque le champ magnétique dans la plaque correspond au champ appliqué. L'EMC final de la plaque est ainsi affecté de façon négligeable; les températures finales moyennes pour les cas de références et les cas complets sont pratiquement égales. De plus, aucun gradient de température significatif n'est présent dans la plaque à la fin de la magnétisation. Ainsi, la réduction du champ magnétique à l'intérieur de la plaque mince de gadolinium peut être négligée lors de l'évaluation de son EMC.

Les résultats obtenus ont permis de quantifier les impacts de la réduction du champ magnétique à l'intérieur de la plaque de gadolinium sur son EMC. Ils ont aussi permis de comprendre les interactions complexes qui prennent place lorsque le caractère transitoire du cycle de magnétisation est considéré. De plus, la solution tridimensionnelle complète du problème thermomagnétique couplée est une première. La méthode générale développée peut être appliquée à d'autres géométries et d'autres matériaux magnétiques. Par exemple, elle pourrait être appliquée à l'étude de l'EMC d'un cylindre poreux de matériau magnétique dont l'utilisation dans les prototypes de RM est relativement répandue. Ou encore pour déterminer la variation du champ externe causée par

l'introduction du matériau magnétique dans le pôle magnétique qui devient alors de domaine de calcul.

Appendice A

Solution analytique de l'équation de Laplace

L'équation de Laplace pour le potentiel magnétique scalaire est présentée à l'équation A.1. Les conditions aux limites liées à la géométrie illustrée à la figure A.1 sont présentées aux équations A.2, A.3 et A.4.

$$\bar{\nabla}^2 \varphi = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$y \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mu_0 \frac{\partial \varphi(x, b, z)}{\partial y} = B_0 \quad 0 \leq x \leq a, 0 \leq z \leq c \\ \mu_0 \frac{\partial \varphi(x, 0, z)}{\partial y} = -B_0 \quad 0 \leq x \leq a, 0 \leq z \leq c \end{array} \right\} \quad (\text{A.2})$$

$$x \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi(0, y, z) = 0 \quad 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c \\ \varphi(a, y, z) = 0 \quad 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c \end{array} \right\} \quad (\text{A.3})$$

$$z \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x, y, 0) = 0 \quad 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b \\ \varphi(x, y, c) = 0 \quad 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b \end{array} \right\} \quad (\text{A.4})$$

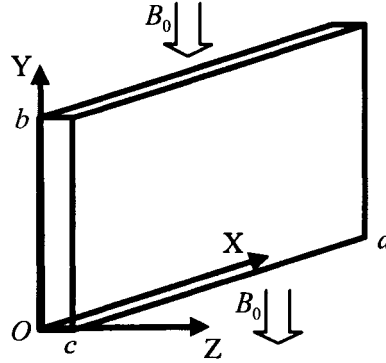


Figure A.1 : Géométrie et conditions aux limites

Puisque les deux conditions aux limites de Neumann en y sont non homogènes, il est nécessaire de scinder la solution du problème en deux parties; chacune avec l'une ou l'autre des conditions imposée comme homogène. La solution complète sera la superposition des deux solutions dérivées.

Solution #1

$$y \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mu_0 \frac{\partial \varphi(x, b, z)}{\partial y} = B_0 \quad 0 \leq x \leq a, 0 \leq z \leq c \\ \frac{\partial \varphi(x, 0, z)}{\partial y} = 0 \quad 0 \leq x \leq a, 0 \leq z \leq c \end{array} \right\} \quad (\text{A.5})$$

La méthode de séparation de variable est utilisée pour décomposer l'équation A.1 en trois équations indépendantes pour chacune des coordonnées x , y et z . La substitution de A.6 dans A.1 permet de déduire A.7, A.8 et A.9 avec l'introduction des constantes λ et β .

$$\varphi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \quad (\text{A.6})$$

$$Z'' + \lambda Z = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$X'' - \beta X = 0 \quad (\text{A.8})$$

$$Y'' + (\beta - \lambda)Y = 0 \quad (\text{A.9})$$

Composante x

Selon l'équation A.6, les conditions aux limites se réduisent maintenant à A.10. La solution de A.8 est posée comme une fonction exponentielle qui permet de définir l'équation caractéristique A.11.

$$X(0) = X(a) = 0 \quad (\text{A.10})$$

$$X(x) = e^{rx} \Rightarrow r^2 e^{rx} - \beta e^{rx} = 0 \Rightarrow r = \pm \sqrt{\beta} \quad (\text{A.11})$$

Tableau A.1 Familles de solutions pour l'équation caractéristique A.11

$\beta=0$	$X(x) = c_1 + c_2 x$ $X(0) = c_1 = 0$ $X(a) = c_2 a = 0 \Rightarrow c_2 = 0$	Triviale
$\beta>0$ (2 racines réelles)	$X(x) = c_1 e^{\sqrt{\beta}x} + c_2 e^{-\sqrt{\beta}x}$ $X(0) = 0 \Rightarrow c_1 = -c_2$ $X(a) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$	Triviale
$\beta<0$ (2 racines complexes)	$X(x) = c_1 \cos(\sqrt{\beta}x) + c_2 \sin(\sqrt{\beta}x)$ $X(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$ $X(a) = 0 \Rightarrow c_2 \sin(\sqrt{\beta}a) = 0 \Rightarrow \sqrt{\beta} = \frac{n\pi}{a}$	$X_n(x) = C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$

Cette dernière donne lieu à trois familles de solutions présentées au tableau A.1. Seul le cas où la constante β possède deux racines complexes permet de générer une solution non triviale.

Composante z

La solution est similaire à la solution pour la composante x . Encore ici, le cas présentant deux racines complexes est la seule solution non triviale.

$$Z(0) = Z(c) = 0 \quad (\text{A.12})$$

$$Z(z) = e^{rz} \Rightarrow r^2 e^{rz} + \lambda e^{rz} = 0 \Rightarrow r = \pm \sqrt{-\lambda} \quad (\text{A.13})$$

Tableau A.2 Familles de solutions pour l'équation caractéristique A.13

$\lambda=0$	$Z(z) = d_1 + d_2 x$ $Z(0) = d_1 = 0$ $Z(c) = d_2 c = 0 \Rightarrow d_2 = 0$	Triviale
$\lambda > 0$ (2 racines complexes)	$Z(z) = d_1 \cos(\sqrt{\lambda} x) + d_2 \sin(\sqrt{\lambda} x)$ $Z(0) = 0 \Rightarrow d_1 = 0$ $Z(c) = 0 \Rightarrow d_2 \sin(\sqrt{\lambda} c) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{m\pi}{c}$	$Z_m(z) = D_m \sin\left(\frac{m\pi z}{c}\right)$
$\lambda < 0$ (2 racines réelles)	$Z(z) = d_1 e^{\sqrt{-\lambda} z} + d_2 e^{-\sqrt{-\lambda} z}$ $Z(0) = 0 \Rightarrow d_1 = -d_2$ $Z(c) = 0 \Rightarrow d_1 = 0$	Triviale

Composante ' y '

Puisque les valeurs de β et λ sont fixés par les deux solutions préalables, la forme de la solution en y est imposée.

$$Y'(0) = 0 \quad (\text{A.14})$$

$$Y'' + (\beta - \lambda)Y = 0 \rightarrow Y'' + \gamma Y \quad (\text{A.15})$$

$$Y(y) = e^{ry} \Rightarrow r^2 e^{ry} + \gamma e^{ry} = 0 \Rightarrow r = \pm \sqrt{-\gamma} \quad (\text{A.16})$$

La valeur de β est strictement négative et la valeur de λ est strictement positive. La valeur de γ tel que défini à l'équation A.15 est donc strictement négative. L'équation caractéristique A.16 génère ainsi deux racines réelles qui définissent la solution A.17. L'application de la condition limite homogène A.14 permet de définir la solution A.18 en cosinus hyperbolique.

$$Y(y) = b_1 e^{\sqrt{-\gamma} y} + b_2 e^{-\sqrt{-\gamma} y} \quad (\text{A.17})$$

$$Y'(0) = 0 \Rightarrow b_1 = b_2 \Rightarrow Y_{mn}(y) = B_{mn} \cosh \left(\pi \sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{c}\right)^2} y \right) \quad (\text{A.18})$$

Selon la relation A.6, la solution recherchée s'écrit comme A.19. Les constantes C , D et B ont été regroupés en une constante de normalisation A qui doit être déterminée avec la condition de Neumann non homogène A.5.

$$\varphi(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cosh(\gamma_{mn} y) \sin\left(\frac{m\pi z}{c}\right) \quad (\text{A.19})$$

$$\gamma_{mn} = \pi \sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{c}\right)^2} \quad (\text{A.20})$$

En fonction de la solution A.19, cette dernière s'écrit comme A.21. La double sommation en n et m peut être éliminée par la multiplication des fonctions sinus d'indices p et q de chaque côté de l'équation A.21. L'intégration de ceux-ci sur la plaque permet de mettre à profit l'orthogonalité des fonctions sinus; les intégrales en x et en z du côté droit de A.22 sont non nuls uniquement si l'indice n égal l'indice p et si l'indice m égal l'indice q . L'expression pour les coefficients A_{mn} , définie selon une certaine combinaison de m et de n , peut ainsi être déduite de l'équation A.23 après l'évaluation des intégrales du côté gauche.

$$\frac{\partial \varphi(x, b, z)}{\partial y} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \gamma_{mn} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sinh(\gamma_{mn} b) \sin\left(\frac{m\pi z}{c}\right) = \frac{B_0}{\mu_0} \quad (\text{A.21})$$

$$\int_0^a \int_0^c (B_0 / \mu_0) \sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{q\pi z}{c}\right) dz dx =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \gamma_{mn} \sinh(\gamma_{mn} b) \int_0^a \int_0^c \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi z}{c}\right) \sin\left(\frac{q\pi z}{c}\right) dz dx \quad (\text{A.22})$$

$$(B_0 / \mu_0) \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx \int_0^c \sin\left(\frac{m\pi z}{c}\right) dz = A_{mn} \gamma_{mn} \sinh(\gamma_{mn} b) \frac{ac}{4} \quad (\text{A.23})$$

Uniquement les valeurs impairs des indices n et m génère des coefficients A_{mn} non nuls. Les indices n et m sont donc substitués ainsi; $n \rightarrow 2n-1$ et $m \rightarrow 2m-1$. La première partie de la solution est décrite par les équations A.24, A.25 et A.26.

$$A_{mn} = \frac{16B_0}{\mu_0 (2m-1)(2n-1) \gamma_{mn} \pi^2 \sinh(\gamma_{mn} b)} \quad (\text{A.24})$$

$$\gamma_{mn} = \pi \sqrt{\left(\frac{(2n-1)}{a}\right)^2 + \left(\frac{(2m-1)}{c}\right)^2} \quad (\text{A.25})$$

$$\varphi_1(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{a}\right) \cosh(\gamma_{mn} y) \sin\left(\frac{(2m-1)\pi z}{c}\right) \quad (\text{A.26})$$

Solution #2

La non homogénéité des conditions aux limites en y est inversée pour déterminer la seconde partie de l'expression analytique du potentiel magnétique scalaire. Le développement permettant de générer la solution 2 est similaire à la démarche suivie précédemment. La solution 2 finale est identique à la solution 1 à l'exception de l'argument du cosinus hyperbolique qui est fonction de la hauteur de la plaque b .

$$y \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi(x, b, z)}{\partial y} = 0 \quad 0 \leq x \leq a, 0 \leq z \leq c \\ \mu_0 \frac{\partial \varphi(x, 0, z)}{\partial y} = -B_0 \quad 0 \leq x \leq a, 0 \leq z \leq c \end{array} \right\} \quad (\text{A.27})$$

$$\varphi_2(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{a}\right) \cosh(\gamma_{nm}(y-b)) \sin\left(\frac{(2m-1)\pi z}{c}\right) \quad (\text{A.28})$$

La solution complète est la superposition des solutions 1 et 2 comme présentée en A.29.

$$\varphi(x, y, z) = \varphi_1(x, y, z) + \varphi_2(x, y, z) \quad (\text{A.29})$$

Liste des références

- [1] Barclay, J. A. 1991. "Prospects for magnetic liquefaction of hydrogen". Proceedings of the XVIIIth International Congress of Refrigeration (Montréal, 10 au 17 août 1991).
- [2] Bleaney, B.I. et B. Bleaney. 1965. Electricity and magnetism. Oxford University Press.
- [3] Bohigas, X., E. Molins, A. Roig, J. Tejada et X.X.Zhang. 2000. "Room temperature magnetic refrigerator using permanent magnets". IEEE Transactions on Magnetics, vol. 36, no. 3, p.538-544.
- [4] Brown, G. V. 1976. "Magnetic heat pumping near room temperature". Journal of Applied Physics, vol. 47, p. 3673-3680.
- [5] Campbell, P. 1994. Permanent magnet materials and their application, Cambridge University Press.
- [6] Chen, D.-X., J.A. Brug et R.B. Goldfarb. 1991. "Demagnetizing factors for cylinders", IEEE Transactions on Magnetics, vol. 27, no. 4, p. 3601-3619.
- [7] Cheng, D.K. 1991. Field and wave electromagnetics. Addison-Wesley.
- [8] Chikazumi, S. 1997. Physics of ferromagnetism. Oxford University Press.
- [9] Clot, P., D. Viallet, F. Allab, A. Kedous-Lebouc, J.M. Fournier et J.P. Yonnet. 2003. "A magnet based device for active magnetic regenerative refrigeration". IEEE Transactions on Magnetics, vol. 39, no. 5, p. 3349-3351.
- [10] Dai, W. 1992. "Regenerative balance in the magnetic Ericsson refrigeration cycles", Journal of Applied Physics, vol. 71, no. 10, p. 5272-5274.
- [11] Dai, W., B.G. Shen, D.X. Li et Z.X. Gao. 2000. "Application of high energy Nd-Fe-B magnets in the magnetic refrigeration". Journal of Magnetism and Magnetic Materials, vol. 218, p. 25-30.
- [12] Dan'kov, S.Y. et A.M. Tishin. 1997. "Magnetic phase transition and the magnetothermal properties of gadolinium". Physical Review B, vol. 57, no. 6, p. 3478-3489.
- [13] Debye, P. 1926. Ann. Phys. Chem., vol. 81, p.1154.
- [14] Giauque, W. F. et D. P. MacDougall. 1993. "Attainment of temperature below 1 degree absolute by demagnetization of Gd₂(SO₄)₃·8H₂O". Physics review, vol. 43, p. 768.
- [15] Gschneidner, K.A., V.K. Perchasky, A.O. Pecharsky et C.B. Zimm. 1999. "Recent developments in magnetic refrigeration". Materials Science Forum, vol. 315, p. 69-76.
- [16] Gschneidner, K.A. et V.K. Perchasky. 1999. "Magnetocaloric effect and magnetic refrigeration". Journal of Magnetism and Magnetic Materials, vol. 200, p. 44-56.

- [17]Gschneidner, K.A. et V.K. Pecharsky. 2000. "Magnetocaloric materials". Annu. Rev. Mater. Sci., vol. 30, p. 387-429.
- [18]Halbach, K. 1980. "Design of permanent multipole magnets with oriented rare earth cobalt material". Nuclear instruments and methods, vol. 169.
- [19]Hashimoto, T., T. Numasawa, M. Shino et T. Okada. 1981. "Magnetic refrigeration in the temperature range from 10 K to room temperature: the ferromagnetic refrigerants". Cryogenics, p. 947-953.
- [20]Hirano, N., S. Nagaya, M. Takahashi, T. Kuriyama, K. Ito et S. Nomura. 2002. "Development of magnetic refrigerator for room temperature application". Advances in Cryogenic Engineering, vol. 47, no. 1027.
- [21]Hirano, N. 2003. American Physical Society Conference (Austin, Texas, 2003).
- [22]Incropera, F.P. et D.P. DeWitt. 1984. Fundamentals of heat and mass transfer, John Wiley and Sons.
- [23]Kittel, C. 1968. Introduction to solid state physics. John Wiley and Sons.
- [24]Lee, S.J. et D.C. Jiles. 2000. "Geometrical enhancements to permanent flux sources: application to energy efficient magnetocaloric refrigeration systems". IEEE Transactions on Magnetics, vol. 36, no. 5, p. 3105-3107.
- [25]Lee, S.J., J.M. Kenkel, V. Pecharsky et D.C.Jiles. 2002. "Permanent magnet array for magnetic refrigerator". Journal of Applied Physics, vol. 81, no. 10, p. 8894-8896.
- [26]Lee, S.J., J.M. Kenkel et D.C. Jiles. 2002. "Design of permanent magnet field source for rotary magnetic refrigeration systems". IEEE Transactions on Magnetics, vol. 38, no. 5, p. 2991-2993.
- [27]Nagle, R.K. et E.B. Saff. 1996. Fundamentals of differential equations and boundary value problems, Addison-Wesley.
- [28]Patankar, S.V. 1980. Numerical heat transfer and fluid flow. John Benjamins Publishing Co.
- [29]Pecharsky, V. et K. Gschneidner. 2001. "Gd₅(SixGe_{1-x})₄: An extremum material". Advanced Materials, vol. 13, p. 683-686.
- [30]Press, W.H., B.P. Flannery, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling. 1988. Numerical Recipes in C: The art of scientific computing. Cambridge University Press.
- [31]Reif, R. 1965. Fundamentals of statistical and thermal physics. McGraw-Hill Inc.
- [32]Rowe, A.M. et J.A. Barclay. 2002. "Design of an active magnetic regenerator test apparatus". Advances in Cryogenic Engineering, vol. 47, p. 995-1002.

- [33]Rowe, A.M. et J.A. Barclay. 2002. "Static and dynamic force balancing in reciprocating active magnetic refrigerators". Advances in Cryogenic Engineering, vol. 47, p. 1003-1010.
- [34]Rowe, A.M. 2002. "Active magnetic regenerators: performance in the vicinity of para-ferromagnetic second order phase transitions". Thèse de doctorat, Vancouver, Université de Victoria, 124p.
- [35]Rowe, A.M. et J.A. Barclay. 2003. "Ideal magnetocaloric effect for active magnetic regenerators". Journal of Applied Physics, vol. 93, no. 3, p.1672-1676.
- [36]Tegus, O., E. Bruck, L.Zhang, K.H.J.Buschow et F.R. Boer. 2002. "Magnetic-phase transition and magnetocaloric effects". Physica B, vol. 319, p.174-192.
- [37]Tishin, A.M. et M.D. Kuz'min. 1992. "Magnetocaloric effet. Part 1: An introduction to various aspects of theory and practice". Cryogenics, vol. 32, no. 6, p. 545-558.
- [38]Tishin, A.M. 1999. "Magnetocaloric effect and heat capacity in the phase transition region". The American Physical Society, p. 503-511.
- [39]Tishin, A.M. 1999. "Magnetocaloric effect in the vicinity of phase transitions". Handbook of Magnetic Materials, vol.12, p. 395-524.
- [40]Van Geuns, J. R. 1966. "A study of a new magnetic refrigerating cycle". Philips Res. Rep. Suppl., vol. 6.
- [41]Wang, A., A. Johnson, A. Sternberg, C. Zimm. 1994. "Experimental results of an efficient active magnetic regenerator refrigerator". 8th International Cryocooler Conference (Juin).
- [42]Warburg, E. 1881. Ann. Phys. Chem., vol. 13, p. 141.
- [43]Zimm, C., A. Jastrab, A. Sternberg, V. Percharsky, K. Gschneidner, M. Osborne et I. Anderson. 1998. "Description and performance of a near room temperature magnetic refrigerator". Advances in Cryogenic Engineering, vol. 43, no. 1759.